

Föreläsning 3, del e (demonstration testuppgifter)

1.12 Skriv den geometriska serien

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \dots \text{ med summa-}$$

beteckning och beräkna dess summa.

Lösning: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \dots =$

$$= \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{9}\right) + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{k-1} \text{ där } a_1 = \frac{3}{4} \text{ och}$$

$$q = \frac{-1/2}{3/4} = \frac{1/3}{-1/2} = \frac{-2/9}{1/3} = \dots = -\frac{2}{3}$$

$$-1 < -\frac{2}{3} < 1 \quad \text{ou!}$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{3/4}{1-(-2/3)} = \frac{3/4}{1+2/3} = \frac{3/4}{5/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

Svar: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{9}{20}$

1.13 Beträkta den geometriska serien

$$x + x^3 + x^5 + \dots$$

a) Skriv den med summabeteckning!

b) Undersök för vilka värden den är konvergent och beräkna dess summa för dessa värden på x !

c) Lös ekvationen $x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{1}{2}$

Lösning:

a) $x + x^3 + x^5 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x(x^2)^{k-1}$

b) $|x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

c) Vi ska hitta alla x sådana att $|x| < 1$ och $x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm\sqrt{2}$$

$$|-1-\sqrt{2}| > 1, \quad |-1+\sqrt{2}| < 1$$

Svar: a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}$ c) $x = \sqrt{2} - 1$

b) $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = \frac{x}{1-x^2}$