Föreläsning 7, del d

Ibland är flera olika substitutioner möjliga:

Ex) Beräkna $\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx$!

Faktorn x^2 är "nästan" derivatan av x^3-2, så vi testar att sätta $u = x^3-2$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-2) = 3x^2$$

$$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{dx}\sqrt{u}\,dx = \frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du =$$
$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3/2}\,u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{9}(x^3-2)^{3/2} + C$$

Men vi kan också sätta $v = \sqrt{x^3-2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3-2} = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2}}(3x^2) = x^2\frac{3}{2v}$$

$$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \int x^2 v\,dx = \int x^2\left(\frac{3}{2v}\,\frac{2v}{3}\right)v\,dx =$$
$$= \int\left(x^2\frac{3}{2v}\right)\frac{2}{3}v^2\,dx = \int\frac{dv}{dx}\left(\frac{2}{3}v^2\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{2}{3}v^2\right)dv = \frac{2}{3}\int v^2\,dv = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}v^3\right) + C =$$
$$= \frac{2}{9}v^3 + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3-2}\right)^3 + C = \frac{2}{9}(x^3-2)^{3/2} + C$$

Variabelsubstitution är ofta särskilt användbart när man ska integrera produkter av trigonometriska funktioner:

Ex) Beräkna $\int(\cos\theta)^2(\sin\theta)\,d\theta$!

Sätt $x = \cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$

$$\int(\cos\theta)^2(\sin\theta)\,d\theta = -\int(\cos\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta =$$
$$= -\int x^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -\int x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + C =$$
$$= -\frac{1}{3}(\cos\theta)^3 + C$$

(Det fungerar inte lika bra att sätta $x = \sin\theta$.)