# Föreläsning 8, del c

## grad $N(x) = 2$:

Vi antar nu att nämnaren $N(x)$ i den rationella funktionen $\frac{T(x)}{N(x)}$ som vi vill integrera är ett andragradspolynom.

Eftersom vi dessutom antar att täljaren $T(x)$ är ett polynom av lägre grad, måste $T(x)$ antingen vara en nollskild konstant eller ett förstagradspolynom.

Vi börjar med att studera några enkla specialfall av andragradspolynom $N(x)$.

Först $N(x) = x^2$. Då får vi:

$$\int \frac{ax+b}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{ax}{x^2} + \frac{b}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int \frac{ax}{x^2}\,dx + \int \frac{b}{x^2}\,dx =$$

$$= a\int \frac{x}{x^2}\,dx + b\int \frac{1}{x^2}\,dx = \longrightarrow$$

$$\rightarrow = a\int \frac{1}{x}\,dx + b\int x^{-2}\,dx =$$

$$= a\ln|x| + b\,\frac{1}{(-1)}\,x^{-1} + C =$$

$$= a\ln|x| - \frac{b}{x} + C$$

(Denna räkning gäller även då $a=0$, alltså både för polynom $T(x) = ax+b$ av grad 0 och 1.)

---

Ex) $$\int \frac{2x-3}{x^2}\,dx = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$$

---

Vi går vidare till specialfallet $N(x) = x^2 + \alpha$ där $\alpha > 0$. Vi behöver standardintegralen

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

som kan generaliseras till

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx = \int \frac{1}{\alpha\left(\frac{x^2}{\alpha}+1\right)}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x\right)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C.$$