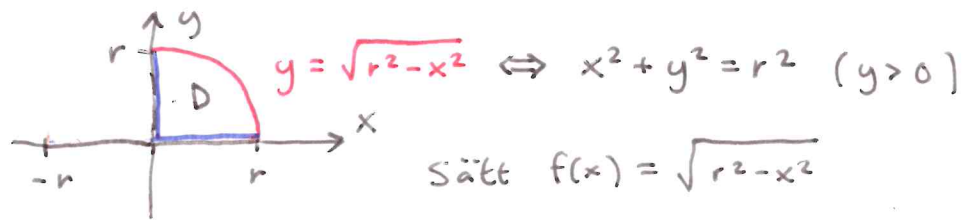


Föreläsning 14, del b

Ex] Låt D vara den halva cirkelshiva med radie r som begränsas av kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ och intervallen $[0, r]$ på x - och y -axlarna. Beräkna volymen av de kroppar som alstras då D roterar kring x - respektive y -axeln!



Kring x-axeln: $\pi \int_0^r f(x)^2 dx =$
 $= \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi r^2 \int_0^r dx - \pi \int_0^r x^2 dx =$
 $= \pi r^2 [x]_0^r - \frac{\pi}{3} [x^3]_0^r = \pi r^2 \cdot r - \frac{\pi}{3} r^3 =$
 $= \pi r^3 (1 - \frac{1}{3}) = \underline{\underline{\frac{2}{3} \pi r^3}}$

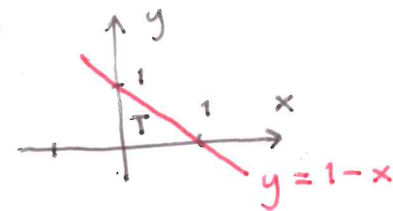
Volymen av ett halvt klot med radien r , stämmer!

Kring y-axeln: $2\pi \int_0^r f(x) x dx =$
 $= 2\pi \int_0^r \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}}_{\sqrt{u}} \underbrace{x}_{-\frac{1}{2} du} dx \quad \text{Sätt } \begin{cases} u = r^2 - x^2 \\ x = r \Leftrightarrow u = 0 \\ x = 0 \Leftrightarrow u = r^2 \end{cases}$

$\rightarrow \textcircled{=} -\pi \int_{r^2}^0 \sqrt{u} du = \pi \int_0^{r^2} u^{1/2} du =$
 $= \frac{\pi}{3/2} [u^{3/2}]_0^{r^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3} \pi r^3}}$

Volymen av ett halvt klot med radien r , stämmer!

Ex] Låt T vara triangeln som begränsas av linjen $y = 1 - x$ och intervallen $[0, 1]$ på x - och y -axlarna. Beräkna volymen av de kroppar som alstras då T roterar kring x - respektive y -axeln!



Kring x-axeln: $\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx =$
 $= \pi \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \pi [x - x^2 + \frac{1}{3} x^3]_0^1 =$
 $= \pi (1 - 1 + \frac{1}{3}) = \textcircled{\frac{\pi}{3}}$

Kring y-axeln: $2\pi \int_0^1 f(x) x dx = 2\pi \int_0^1 (1-x) x dx =$
 $= 2\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = 2\pi [\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3]_0^1 =$
 $= 2\pi (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \textcircled{\frac{\pi}{3}}$

I båda fallen volymen av en cirkulär kon med radie 1 och höjd 1, stämmer!