Matematik
Chalmers tekniska högskola 2018-08-27

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Carl Lundholm, ankn 6792 Plats och tid: Johanneberg, 14:00-18:00
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 Betrakta följande vektorekvation.

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla x_1, x_2, x_3, x_4 som uppfyller ekvationen ovan. (4p)

(b) Man är intresserad av positiva heltalslösningar x_1, x_2, x_3, x_4. Bestäm den minsta positiva heltalslösningen. (2p)

(c) Är vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar. (2p)

(d) Visa att 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$ alltid är linjärt beroende. (4p)

(a) Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Gausselimineras till

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right]$$

Låt $x_4 = t$ vara den friia variabeln. Lösningarna ges då av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

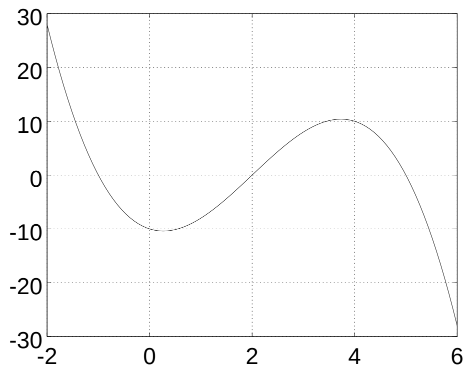
(b) $t = 4$ ger $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ och $x_4 = 4$

(c) Ja de är linjärt oberoende eftersom det inte finns något $t \in \mathbb{R}$ sådant att
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) Låt $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ vara 4 vektorer i $\mathbb{R}^3$. Bilda matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix}$. Ekvationssystemet $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ har då fler obekanta än ekvationer, så det kommer att finnas minst en fri variabel. Dvs. ekvationssystemet har en icketrivial lösning $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, så kolumnerna i $\boldsymbol{A}$ är linjärt beroende.

---

2 Låt
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
I figuren till höger har man ritat en graf för det karakteristiska polynomet $p(\lambda)$ till $\boldsymbol{A}$ på intervallet $-2 \leq \lambda \leq 6$.



(a) Bestäm det karakteristiska polynomet till $\boldsymbol{A}$. (4p)

(b) Bestäm alla egenvärden till $\boldsymbol{A}$ och tillhörande egenvektorer. (4p)

(c) Visa att egenvektorerna i (b)-uppgiften är ortogonala. (2p)

(d) Låt $\boldsymbol{A}$ vara en symmetrisk $m \times m$ matris och $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ två egenvektorer till $\boldsymbol{A}$. Visa att $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ är ortogonala om de hör till olika egenvärden $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (5p)

(a)

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(3-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 4) - 4(1-\lambda) = \cdots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10$$

(b) Egenvärdena ges av de λ där $p(\lambda) = 0$. I figuren ser vi att $\lambda_1 \approx -1$, $\lambda_2 \approx 2$ och $\lambda_3 \approx 5$. En kontroll visar att $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 5$ Egenvektorn $\boldsymbol{v}_1$ som hör till $\lambda_1 = -1$ uppfyller

$$\boldsymbol{Av}_1 = -\boldsymbol{v}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{Av}_1 + \boldsymbol{Iv}_1 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$$

Vi har
$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
och
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
som ger $\boldsymbol{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $0 \neq t \in \mathbb{R}$ kan väljas fritt.

Resonera på samma sätt för de andra egenvektorerna:

Egenvektorn $\boldsymbol{v}_2$ som hör till $\lambda_2 = 2$ ges av $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ och

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har lösning $\boldsymbol{v}_2 = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ där $0 \neq t \in \mathbb{R}$.

Egenvektorn $\boldsymbol{v}_3$ som hör till $\lambda_3 = 5$ ges av $(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ och

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har lösning $\boldsymbol{v}_3 = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $0 \neq t \in \mathbb{R}$.

(c)

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$$

(d) Visa att $\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = 0$. Eftersom $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1$ har vi

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)^T\boldsymbol{v}_2 = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1)^T\boldsymbol{v}_2 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2$$

Eftersom $\boldsymbol{A}$ är symmetrisk har vi att $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Så

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)^T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1^T\lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2$$

Dvs $\lambda_1\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2$. Eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så måste $\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2 = 0$

---

3 (a) Bestäm ekvationen (på normalform) för ett plan som innehåller linjen (5p)

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Hur många sådana plan finns det?

(b) Bestäm skärningen mellan följande par av plan (3p)

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen, tex. $x + y + z - 1 = 0$

(b) Successiv elimination ger

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+5z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y+3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$$

---

4 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & p \end{bmatrix}$$

där p är ett reellt tal.

(a) Bestäm p sådant att $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tillhör nollrummet till $\boldsymbol{A}$. (3p)

(b) Bestäm p sådant att matrisen får full rang, dvs. rangen för matrisen blir 3. (4p)

(a) $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{0}$ dvs

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1+p \end{bmatrix}$$

Svar $p = 1$.

(b) Bestäm t.ex. ett p sådant att $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Utveckling längs första raden, $\det(\boldsymbol{A}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -p+1$. Så $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ då $p = 1$. Svar: $p \neq 1$

---

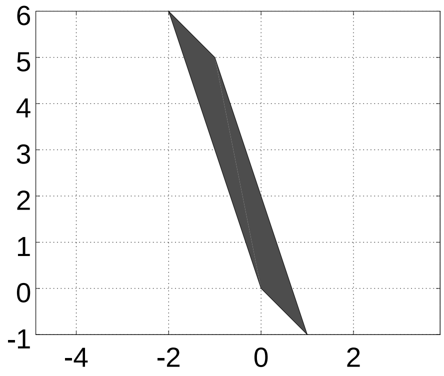
5 Låt $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vara två avbildningar.

(a) Avgör vilka av avbildningarna ovan som är linjära. Motivera ditt svar. (4p)

(b) Man har använt avbildningen $\boldsymbol{T}$ ovan för att beräkna bilden av en rektangel med höjden 2 och bredden 1, och med nedre vänstra hörnet i origo. Rita bilden och beräkna dess area. (4p)

(a) Låt $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{S}$ är inte linjär ty
$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+1 \\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2) \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b})$. $\boldsymbol{T}$ däremot är linjär ty matris-vektor produkt uppfyller linjäritetsvillkoren.

(b)



Arean är $2\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}) = 2 \cdot 2 = 4$
