Tentamen TMV216/MMGD20

Datum: 12 Juni 2020, 08.30
Telefonvakt: Axel Flinth, 0701-757469
Hjälpmedel: Linjal, penna, kladdpapper, ordbok.
Betygsgränser: (TMV216) 20 poäng för betyget 3, 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5.
(MMDGU20) 20 poäng för betyget G, 35 för betyget VG.
Det finns totalt 50 poäng att samla.

Beräkningar och motiveringar skall redovisas. **Enbart svar ger inga poäng.**
Tentamen består av **sju (7)** uppgifter. Tesen består av **tre (3)** blad.

Lycka till!

Uppgift 1 **(8p)**

Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \end{array}$$

(a) Vilken matris är systemets totalmatris? (1p)

(b) Använd Gaussalgoritmen för att omforma totalmatrisen till trappstegsform. (3p)

(c) Vilka kolumner i den omformade totalmatrisen är fria respektive pivotkolumner? (1p)

(d) Avgör huruvida ekvationen har lösningar, och bestäm i sådana fall samtliga lösningar. (3p)

Uppgift 2 **(7p)**

Betrakta följande matris

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärden och egenvektorer för A.

Uppgift 3 **(7p)**

Betrakta de tre punkterna

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i planet.

1. Bestäm ekvationer för normal- och parameterform för linjen ℓ som går genom punkterna P_1 och P_2. (5p)
2. Ligger P_3 på ℓ? (2p)

Uppgift 4 **(7p)**

Betrakta den linjära avbildningen

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm $\mathcal{G}$:s avbildningsmatris med avseende på standardbasen. (3p)

(b) Låt $K \subseteq \mathbb{R}^3$ vara enhetskuben. Hur stor volym har

$$\mathcal{G}(K) = \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

alltså den mängd K avbildas på av $\mathcal{G}$? (2p)

(c) Är $\mathcal{G}$ inverterbar? *Du behöver i sådana fall inte bestämma* $\mathcal{G}^{-1}$. (2p)

Uppgift 5 **(7p)**

Betrakta för $a \in \mathbb{R}$ matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Motivera att $\mathcal{N}(B)$, B:s nollrum, innehåller minst en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ för varje värde på a. (2p)

(b) För vilka värden på a gäller

$$\mathrm{rang}(B) = 3?$$

(3p)

(c) Betrakta nu istället, för $b \in \mathbb{R}$, matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & b^2 - 5 \\ 1 & 3 & b^4 - b & b^2 - 1 + b \\ 2 & 1 & b^2 & b \end{pmatrix}.$$

Finns det ett värde på b så att

$$\operatorname{rang}(C) = 1?$$

(2p)

Uppgift 6 **(8p)**

En forskargrupp äter lunch tillsammans varje dag. De har fyra restauranger att välja på. Forskargruppen äter aldrig på samma restaurang två dagar i rad. De väljer istället slumpmässigt en av de övriga tre restaurangerna. Sannolikhet för att välja var och en av de de tre andra restaurangerna är lika stor.

(a) Beskriv en graf och en Markovkedja på den som modellerar forskargruppens restaurangbesök. Bestäm speciellt Markovkedjans övergångsmatris. (4p)

(b) Bestäm en stationär fördelningen för Markovkedjan. (2p)

(c) Forskargruppen har gjort såhär under en mycket lång tid. Motivera att sannolikheterna för att forskargruppen väljer de olika restaurangerna ges av vektorn du beräknade i (b). (2p)

Uppgift 7 **(6p)**

Låt $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

(a) Antag att A inte har egenvärdet 1. Vilken rang har då $(A - I_2)$? (2p)

(b) Låt $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den affina avbildningen som ges av matrisen A och translationsvektorn $\mathbf{b}$, alltså

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \mapsto AP + \mathbf{b}.$$

Antag att A inte har egenvärdet 1. Bevisa att Φ har en fixpunkt, dvs. att det existerar en punkt P^* med $\Phi(P^*) = P^*$. (4p)