Föreläsning 14, del a

Rotationskroppars volymer (4.2)

- fortsättning: rotation kring y-axeln

Differentialekvationer

- separabla (5.1)

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och låt D vara området i planet som begränsas av x-axeln, kurvan $y=f(x)$ och linjerna $x=a$ och $x=b$.

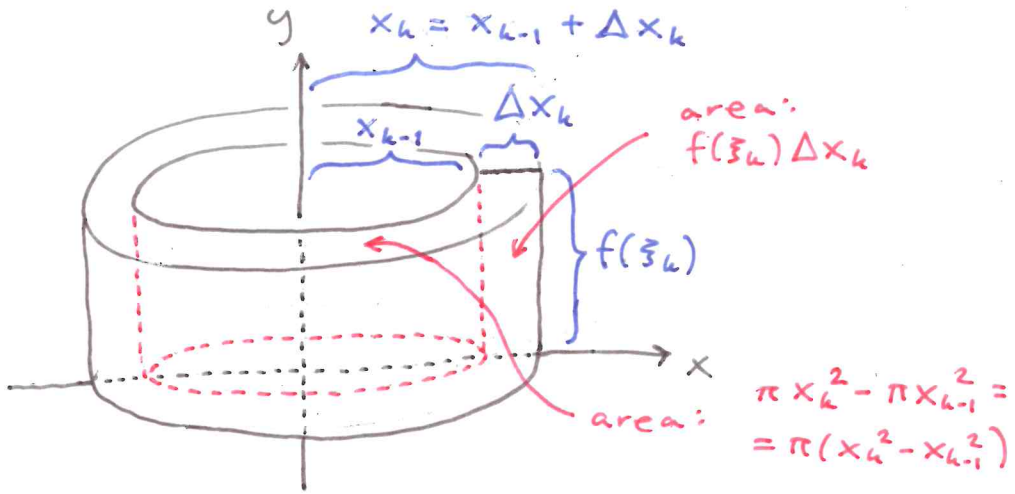
Förra gången såg vi att volymen av kroppen som alstras då D roterar kring x-axeln är

$$\pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

Vad är volymen av kroppen som alstras då D roterar kring y-axeln?

Vi antar här att $0 \le a < b$ och att $f(x) \ge 0$ för alla $x \in [a,b]$ (viktigt!)

För varje $n=1,2,\dots$ gör vi samma indelning av $[a,b]$ som förut (se Föreläsning 13, del d). Låt d_n vara längden av det längsta delintervallet, $d_n \to 0$ då $n \to \infty$.



Den här gången ska vi summera volymen av cylindrar där basytorna är cirkelringar.

Cirkelringens area: $\pi(x_k^2 - x_{k-1}^2) =$

$= \pi(x_k - x_{k-1})(x_k + x_{k-1}) = \pi \Delta x_k (x_{k-1} + x_k) =$

$= \pi \Delta x_k (x_{k-1} + (x_{k-1} + \Delta x_k)) =$

$= 2\pi x_{k-1} \Delta x_k + \pi (\Delta x_k)^2$

Cylinderns volym: $2\pi f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi f(\xi_k)(\Delta x_k)^2$

Volymen av rotationskroppen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(2\pi f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 \right) =$$

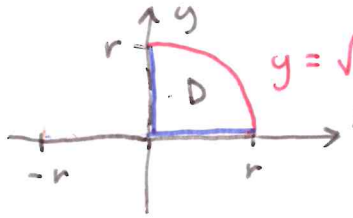
$$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) x_{k-1} \Delta x_k + \pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 =$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\,x\,dx$$

(eftersom $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta x_k)^2 \le$
$\le d_n \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \to$
$\to 0 \cdot \int_a^b f(x)\,dx = 0$ då $n \to \infty$)

Föreläsning 14, del b

Ex Låt D vara den halva cirkelskiva med radie r som begränsas av kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ och intervallen $[0, r]$ på x- och y-axlarna. Beräkna volymen av de kroppar som alstras då D roterar kring x- respektive y-axeln!



$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 \quad (y > 0)$

Sätt $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Kring x-axeln: $\pi \int_0^r f(x)^2 dx =$

$= \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \pi r^2 \int_0^r dx - \pi \int_0^r x^2 dx =$

$= \pi r^2 [x]_0^r - \frac{\pi}{3} [x^3]_0^r = \pi r^2 \cdot r - \frac{\pi}{3} r^3 =$

$= \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi r^3$

Volymen av ett halvt klot med radien r, stämmer!

Kring y-axeln: $2\pi \int_0^r f(x)\, x\, dx =$

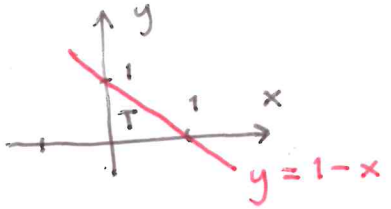
$= 2\pi \int_0^r \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}}_{\sqrt{u}} \underbrace{x\, dx}_{-\frac{1}{2} du} \overset{(=)}{\underset{\left(\begin{array}{c} u = r^2 - x^2 \\ x = r \Leftrightarrow u = 0 \\ x = 0 \Leftrightarrow u = r^2 \end{array}\right)}{}}$

$\rightarrow \overset{(=)}{} -\pi \int_{r^2}^0 \sqrt{u}\, du = \pi \int_0^{r^2} u^{1/2} du =$

$= \frac{\pi}{3/2} [u^{3/2}]_0^{r^2} = \frac{2}{3} \pi r^3$

Volymen av ett halvt klot med radien r, stämmer!

Ex Låt T vara triangeln som begränsas av linjen $y = 1 - x$ och intervallen $[0, 1]$ på x- och y-axlarna. Beräkna volymen av de kroppar som alstras då T roterar kring x- respektive y-axeln!



Sätt $f(x) = 1 - x$

Kring x-axeln: $\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 (1-x)^2 dx =$

$= \pi \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx = \pi \left[x - x^2 + \frac{1}{3} x^3\right]_0^1 =$

$= \pi \left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

Kring y-axeln: $2\pi \int_0^1 f(x)\, x\, dx = 2\pi \int_0^1 (1-x)\, x\, dx =$

$= 2\pi \int_0^1 (x - x^2) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3\right]_0^1 =$

$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$

I båda fallen volymen av en cirkulär kon med radie 1 och höjd 1, stämmer!

Föreläsning 14, del c

Differentialekvationer (5.1)

En (ordinär) differentialekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion $y(x)$ av en variabel x, och dess derivator $y'(x)$, $y''(x)$, ... En lösning till en differentialekvation är alltså en funktion, inte ett tal.

Massor av tillämpningar inom fysik, kemi, biologi, ekonomi ... !

En differentialekvation av ordning $n = 1, 2, \ldots$ innehåller derivator av högst ordning n.

Vi har redan lärt oss i flera olika fall hur man löser en första ordningens differentialekvation av typen $y'(x) = f(x)$ där $f(x)$ är en känd funktion.

Vi kallade då varje lösning y för en primitiv funktion till f, och införde beteckningen $\int f(x)\,dx$ (obestämd integral) för mängden av alla oändligt många lösningar.

Annat exempel på en första ordningens differentialekvation: $y'(x) = y(x)$

Till skillnad från den förra har vi nu även en y-term (utan derivator) men ingen term som är en känd funktion av x.

Vi söker alltså en funktion y som är sin egen derivata: $y' = y$. Även i detta fall finns det oändligt många lösningar: $y(x) = Ce^x$ där C är en konstant.

Högre ordningars differentialekvationer av typen $y''(x) = f(x)$, $y'''(x) = f(x)$, ... kan (i bästa fall) lösas genom upprepad integration. Varje integration ger en ny konstant!

Ex Lös differentialekvationen $y''(x) = 3$!

$y''(x) = 3 \Leftrightarrow y'(x) = 3x + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{3}{2}x^2 + Cx + D$

där C och D är godtyckliga konstanter.

Den allmänna lösningen till en differentialekvation av ordning n innehåller n godtyckliga konstanter (oändligt många speciella lösningar).

Föreläsning 14, del d

Separabla diffekvationer (5.2)

En diffekvation av första ordningen som kan skrivas $g(y(x))\,y'(x) = f(x)$, där f och g är kända funktioner, kallas separabel (vi kan separera x från y).

Kan också skrivas $y'(x) = f(x)\,\frac{1}{g(y(x))}$

Ex) Är diffekvationen $xy' = y^2 \sin x$ separabel?

$xy' = y^2 \sin x \Leftrightarrow y' = \frac{\sin x}{x}\,y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\,y' = \frac{\sin x}{x}$

Ja, om vi sätter $g(y) = \frac{1}{y^2}$ och $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
så kan den skrivas $g(y)\,y' = f(x)$. Separabel!

Ex) Är diffekvationen $xy' = y^2 + \sin x$ separabel?

$xy' = y^2 + \sin x \Leftrightarrow y' = \frac{y^2 + \sin x}{x}$

Högerledet $\frac{y^2 + \sin x}{x}$ kan inte skrivas som en produkt av en funktion $f(x)$ och en funktion $\frac{1}{g(y(x))}$ så den är inte separabel!

Vi löser separabla diffekvationer genom att använda kedjeregeln baklänges:

$$\frac{d}{dx}\,G(y(x)) = G'(y(x))\,y'(x)$$

Om nu G är en primitiv funktion till g, och $g(y(x))\,y'(x) = f(x)$, så får vi

$$\frac{d}{dx}\,G(y(x)) = G'(y(x))\,y'(x) = g(y(x))\,y'(x) = f(x)$$

och genom att sedan integrera med avseende på x:

$$G(y(x)) = \int f(x)\,dx$$

Till sist: lös ut y ur G (om möjligt)!

Ex) Lös diffekvationen $e^{2y(x)}\,y'(x) = x$!

Sätt $g(y(x)) = e^{2y(x)}$ och $G(y(x)) = \frac{1}{2}\,e^{2y(x)}$

Då får vi $\frac{d}{dx}\,G(y(x)) = \frac{1}{2}\,e^{2y(x)}\,(2y'(x)) = x$

och $\frac{1}{2}\,e^{2y(x)} = G(y(x)) = \int x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 + C$

$\Leftrightarrow e^{2y(x)} = x^2 + 2C \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2C)$

(Vi kan också skriva $e^{2y}\,\frac{dy}{dx} = x \Leftrightarrow e^{2y}\,dy = x\,dx$ och sedan sätta integraltecken framför:

$\int e^{2y}\,dy = \int x\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,e^{2y} = \frac{1}{2}\,x^2 + C$)

Föreläsning 14, del e (demonstration testuppgifter)

5.2

a) Lös Malthus differentialekvation $P'(t) = rP(t)$ med begynnelsevillkoret $P(0) = P_0$ där r och P_0 är konstanter, och bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

($P(t)$: antalet individer i en population vid tiden t ($P(t) > 0$)

r: reproduktionsparameter)

Lösning: Separera!

$$P'(t) = rP(t) \iff \frac{1}{P(t)} P'(t) = r$$

(inre derivata!)

$$\iff \frac{d}{dt}(\ln P(t)) = r$$ Integrera!

$$\iff \ln P(t) = rt + C$$ Lös ut $P(t)$ genom att exponentiera!

$$\iff e^{\ln P(t)} = e^{(rt+C)}$$

$$\iff P(t) = e^{(rt+C)} = e^C e^{rt}$$

Vi bestämmer konstanten C med hjälp av begynnelsevillkoret:

$$P(0) = P_0 \iff e^C e^{r\cdot 0} = P_0 \iff e^C = P_0$$

Vi sätter in $e^C = P_0$ i den allmänna lösningen:

$$P(t) = e^C e^{rt} = P_0 e^{rt}$$

Svar: $P(t) = P_0 e^{rt}$ $\to \infty$ då $t \to \infty$

b) Lös den logistiska differentialekvationen

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right), \quad P(0) = P_0$$

där r, P_0 och K (det maximala antalet individer) är konstanter, och bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

Lösning:

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

$$\iff P'(t) = rP(t)\,\frac{K - P(t)}{K}$$

$$\iff \frac{1}{P(t)(K - P(t))} P'(t) = \frac{r}{K}$$

Partialbråksuppdela bråket i vänsterledet!

Ansatz: $\frac{1}{P(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}$

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{K-P} = \frac{A(K-P) + BP}{P(K-P)} = \frac{AK - AP + BP}{P(K-P)} =$$

$$= \frac{AK + (B-A)P}{P(K-P)} \qquad \begin{cases} AK = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \iff A = B = \frac{1}{K}$$

Alltså: $\frac{1}{P(K-P)} = \frac{1/K}{P} + \frac{1/K}{K-P} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right)$

→

Föreläsning 14, del f (demonstration testuppgifter)

5.2b (forts.)

$$\frac{1}{K}\left(\frac{1}{P(t)}+\frac{1}{K-P(t)}\right)P'(t)=\frac{r}{K}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{P(t)}+\frac{1}{K-P(t)}\right)P'(t)=r$$

integrera med avseende på t!

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(\ln P(t)-\ln\big(K-P(t)\big)\Big)=r$$

$$\Leftrightarrow \ln P(t)-\ln\big(K-P(t)\big)=rt+C$$

exponentiera!

$$\Leftrightarrow \ln\frac{P(t)}{K-P(t)}=rt+C$$

invertera!

$$\Leftrightarrow \frac{P(t)}{K-P(t)}=e^{rt}e^{C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K-P(t)}{P(t)}=e^{-C}e^{-rt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K}{P(t)}-1=e^{-C}e^{-rt} \Leftrightarrow \frac{K}{P(t)}=e^{-C}e^{-rt}+1$$

$$\Leftrightarrow P(t)=\frac{K}{1+e^{-C}e^{-rt}}$$

Vi bestämmer konstanten C med hjälp av begynnelsevillkoret:

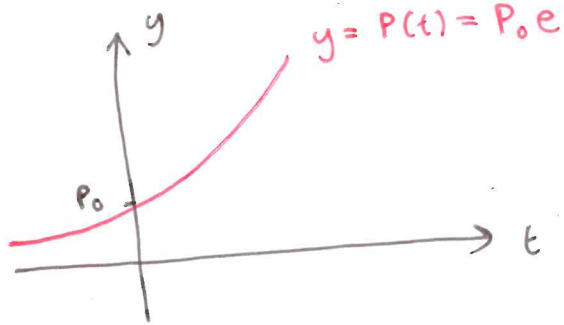
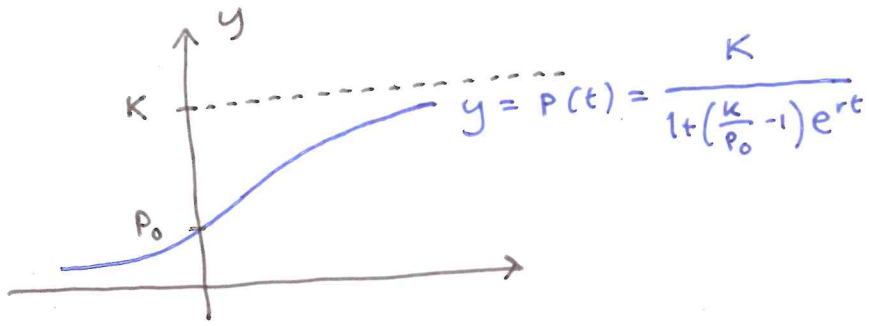
$$P(0)=P_0 \Leftrightarrow P_0=\frac{K}{1+e^{-C}} \Leftrightarrow$$

$$1+e^{-C}=\frac{K}{P_0} \Leftrightarrow e^{-C}=\frac{K}{P_0}-1$$

Svar: $$P(t)=\frac{K}{1+\left(\frac{K}{P_0}-1\right)e^{-rt}} \to K \text{ då } K\to\infty$$

---

a)



b)