Föreläsning 1, del d

Def] En summa $\sum_{k=1}^{n} a_k$ är aritmetisk om talföljden $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är aritmetisk.

Ex]
$$2\sum_{k=1}^{6} k = \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\ + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array} =$$
$$= 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 =$$
$$= 6\cdot 7 \Rightarrow \sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\cdot 7}{2}$$

Allmänt: $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

Ex] $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = ?$ Två sätt:

① $$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = (1-1)+(2-1)+(3-1)+\cdots+(n-1) =$$
$$= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

② $$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n-2n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Allmän aritmetisk summa med konstant differens d:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)d) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$$
$$= na_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{n\left(a_1 + d\,\frac{n-1}{2}\right)} =$$
$$= \frac{n}{2}\Big(\overset{2a_1}{a_1+}\underbrace{a_1 + d(n-1)}_{a_n}\Big) = \boxed{n\,\frac{a_1+a_n}{2}}$$

Def] En summa $\sum_{k=1}^{n} a_k$ är geometrisk om talföljden $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är geometrisk.

Sätt $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ och låt q vara den konstanta kvoten: $(q \neq 1)$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n =$$
$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$
$$\Rightarrow S_n\cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$
$$\Rightarrow S_n - S_n\cdot q = a_1 - a_1 q^n$$
$$\Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow S_n = \boxed{a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}}$$