Linjär algebra - extra uppgifter

Övningsuppgifter

1. Hitta alla matriser som löser respektive matrisekvation nedan genom att göra en ansats.

$$(a)\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix} X = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix} \qquad (b)\quad Y \begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

2. Hitta alla matriser som kommuterar med $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. Det finns ett snabbt sätt att beräkna produkter av matriser med många nollor. Betrakta mängden 3×3 matriser. Låt E_{ij} vara matrisen med en etta på position (i, j) och resten nollor. Matriser av denna form kan multipliceras enligt regeln

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{om } j = k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Varje matris kan skrivas som en linjärkombination av dessa martiser, exempelvis

$$N = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = E_{12} + 2E_{13} + 3E_{23}$$

Använd denna notation och räknelagar för att beräkna N^2 och N^3.

4. Använd föregående uppgift för att beräkna $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^7$.

5. En vanlig andragradsekvation har max två lösningar. Visa att detta inte gäller för matriser genom att hitta fyra olika lösningar till matrisekvationen $X^2 = X$.

6. Kom ihåg att Fibonacci-talet är $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Varje tal är summan av de två föregående. Man kan beräkna element ur Fibonacci-följden med matriser.

   (a) Hitta en 2×2-matris A som uppfyller $A \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ x_1 + x_2\end{bmatrix}$ för alla tal x_1, x_2.

   (b) Beräkna A^8

   (c) Beräkna $A^8 \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. Hur är resultatet relaterat till Fibonacci-följden?

   (d) Vilken sekvens av tal fås genom att istället beräkna $A^n \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$? Hur är dessa relaterade till Fibonacci-följden?

7. Varje dag i Göteborg är det soligt eller molningt. Om det är soligt en dag är det 50% chans att nästa dag blir solig. Om det är molnigt är det 25% chans att nästa dag blir solig. Denna information kan skrivas som en "Markov-matris" $M = \begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.25 & 0.75\end{bmatrix}$.

   Hitta en vektor $X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ som uppfyller $M^T X = X$ och $x_1 + x_2 = 1$. Denna vektor X anger hur många dagar i snitt det kommer att vara soligt respeltive molnigt. Vad är sannolikheten att det är soligt en slumpmässigt vald dag enligt denna modell?

Tips

1. (a) Ansätt $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Vid multiplikation får du ett enkelt 4×4-system.
2. Du söker X så att $AX = XA$, gör en ansats som ovan och lös systemet.
3. Använd den distributiva lagen på $(E_{12} + 2E_{13} + 3E_{23})(E_{12} + 2E_{13} + 3E_{23})$
4. Beräkna $(I + N)^7$ med binomialsatsen! Termer N^k försvinner för $k > 2$.
5. Vilka matriser av formen E_{ij} uppfyller ekvationen? Uppgiften kan också lösas med ansats!
6. (b) A^8 kan beräknas med endast tre matrismultiplikationer!
7. Bryt ut $\frac{1}{4}$ ur M^T för att förenkla räkningen.

Svar

1. (a) $X = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) Lösning saknas
2. Matriser av form $\begin{bmatrix} s & t \\ 0 & s \end{bmatrix}$ där $s, t \in \mathbb{R}$ kommuterar med A.
3. $N^2 = 3E_{13}$, $N^3 = 0$
4. $I + \binom{7}{1}N + \binom{7}{2}N^2 = I + 7N + 21N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 77 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
5. $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $A^8 = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}$

   (c) $A^8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 55 \end{bmatrix}$. De två talen är F_9 och F_{10}, nionde och tionde talet i Fibonacci-följden. Generellt blir $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{bmatrix}$.

   (d) $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$. Varje tal är summan av de två föregående fast med andra startvärden än i Fibonacci-följden. Dessa kallas Lucas-tal, du kan läsa mer om dessa på wikipedia.
7. $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Det blir soligt var tredje dag i snitt.