# Föreläsning 12, del b

**Sats** Integralkalkylens medelvärdessats:

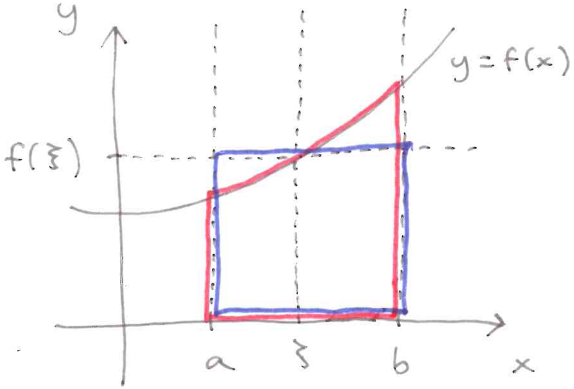
Anta att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$.

Då finns ett tal $\xi \in [a, b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

---

Satsen säger att vi kan välja $\xi$ så att arean av det röda området och den blå rektangeln är lika stora!




---

**Ex** Om $f(x) = kx + m$ ($k$ och $m$ konstanter) så kan vi välja $\xi = \frac{1}{2}(a+b)$:

$$f(\xi)(b-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) =$$

$$= \frac{k}{2}(a+b)(b-a) + m(b-a) = \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a) =$$

$$= k\int_a^b x\,dx + m\int_a^b dx = \int_a^b (kx+m)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

**Bevis** Enligt satsen om största och minsta värde finns $M$ och $m$ sådana att

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Downarrow \; (4)$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\Updownarrow \quad (b-a>0)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns det (eftersom $f$ är kontinuerlig) ett $\xi \in [a, b]$ sådant att

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \iff$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \qquad \square$$