Föreläsning 8, del d

Vi har alltså

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C$$

för alla $\alpha > 0$.

Genom att använda integrationsregeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

får vi vidare (om vi sätter $f(x) = x^2+\alpha$)

$$\int \frac{x}{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|f(x)| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+\alpha| + C$$

och slutligen

$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha}\,dx = a\int \frac{x}{x^2+\alpha}\,dx + b\int \frac{1}{x^2+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\ln|x^2+\alpha| + \frac{b}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C.$$

Vi avslutar med specialfallet $N(x) = x^2 - \alpha$ där $\alpha > 0$. Då utnyttjar vi att

$$x^2-\alpha = x^2 - (\sqrt{\alpha})^2 = (x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})$$

(konjugatregeln!) och att

$$\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}} = \frac{x+\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} + \frac{x-\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{\alpha})+(x-\sqrt{\alpha})}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = \frac{2x}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = 2\,\frac{x}{x^2-\alpha},$$

$$\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}} = \frac{x+\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} - \frac{x-\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{\alpha})-(x-\sqrt{\alpha})}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})} = 2\sqrt{\alpha}\,\frac{1}{x^2-\alpha}.$$

Vi får $\frac{ax+b}{x^2-\alpha} = a\frac{x}{x^2-\alpha} + b\frac{1}{x^2-\alpha} =$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{x+\sqrt{\alpha}}\right)$$

Vi kan alltså skriva $\frac{ax+b}{x^2-\alpha}$ som en summa av rationella funktioner där nämnaren är ett förstagradspolynom (som vi redan kan integrera)! Mer om detta nästa gång!