Föreläsning 12, del a

Räkneregler för bestämda integraler (3.4)

- Räkneregler motsvarande dem för integraler av trappfunktioner (linearitet, ...) se boken!
- Integralkalkylens medelvärdessats
- Analysens huvudsats
- Insättningsformeln $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Sats Anta att f och g är integrerbara funktioner på $[a,b]$. Då är $f+g$ och Cf, där C är en konstant, också integrerbara och följande räkneregler gäller:

(1) $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
(för alla c sådana att integralerna i högerledet är definierade, även $c \notin [a,b]$)

(4) $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
om $f(x) \leq g(x)$ för alla $x \in [a,b]$

Anm (1) + (2) = linearitet!

Ex Vilket av talen $\int_0^2 x^3\,dx$ och $\int_1^2 x^2\,dx$ är störst? Vi testar att uppskatta $\int_0^2 x^3\,dx$ neråt för att se om vi får $\int_1^2 x^2\,dx$:

$$\int_0^2 x^3\,dx \overset{(3)}{=} \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x^3\,dx \geqslant$$

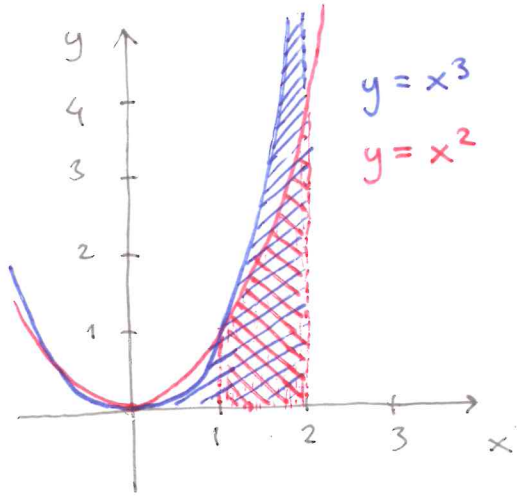
(enligt (4) eftersom $x^3 \geqslant 0$ för alla $x \in [0,1]$)

$$\geqslant \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 x^3\,dx = \int_1^2 x^3\,dx \geqslant$$

(enligt (4) eftersom $x^3 \geqslant x^2$ för alla $x \in [1,2]$)

$$\geqslant \int_1^2 x^2\,dx$$

Alltså är $\int_0^2 x^3\,dx$ större än (eller lika med) $\int_1^2 x^2\,dx$!



Föreläsning 12, del b

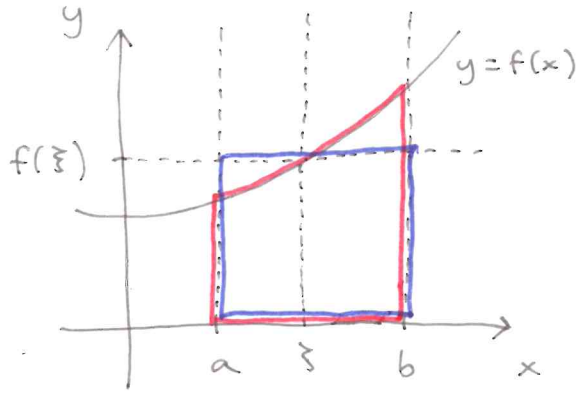
Sats Integralkalkylens medelvärdessats:

Anta att f är kontinuerlig på $[a,b]$.

Då finns ett tal $\xi \in [a,b]$ sådant att

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Satsen säger att vi kan välja ξ så att arean av det röda området och den blå rektangeln är lika stora!



Ex Om $f(x) = kx+m$ (k och m konstanter) så kan vi välja $\xi = \frac{1}{2}(a+b)$:

$$f(\xi)(b-a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) =$$

$$= \frac{k}{2}(a+b)(b-a) + m(b-a) = \frac{k}{2}(b^2-a^2) + m(b-a) =$$

$$= k\int_a^b x\,dx + m\int_a^b dx = \int_a^b (kx+m)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis Enligt satsen om största och minsta värde finns M och m sådana att

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Downarrow \quad (4)$$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

$$\Updownarrow \quad (b-a>0)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

Enligt satsen om mellanliggande värden finns det (eftersom f är kontinuerlig) ett $\xi \in [a,b]$ sådant att

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

□

Sats Analysens huvudsats:

Anta att f är kontinuerlig på $[a,b]$.

Då är funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

en deriverbar funktion på $[a,b]$, och

$F'(x) = f(x)$. (Alltså är F en primitiv funktion till f!) Med andra ord:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Bevis

$$F(x+h) - F(h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \text{(medelvärdessatsen)}$$

$$= f(\xi)\big((x+h)-x\big) = hf(\xi)$$

för något $\xi \in [x, x+h]$ med gränsvärdet $\xi \to x$ då $h \to 0$.

(3)

Nu får vi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(\xi)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x). \qquad \square$$

Sats Insättningsformeln:

Anta att f är kontinuerlig på $[a,b]$ och att F är en primitiv funktion till f.

Då gäller $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Bevis Två primitiva funktioner kan bara skilja sig åt på en konstant C. Det finns alltså en konstant C så att

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$. sätt in $x=b$ och $x=a$!

$$F(b) - F(a) = \Big(\int_a^b f(t)\,dt + C\Big) - \Big(\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} + C\Big) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt + C - C$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

Föreläsning 12, del d

Vi kan alltså beräkna bestämda integraler med hjälp av insättningsformeln

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

om vi känner till en primitiv funktion F till f.

Vi inför betecknigen $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Sambandet mellan bestämd och obestämd integral kan därmed skrivas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

Ex Beräkna $\int_0^2 x^3\,dx$!

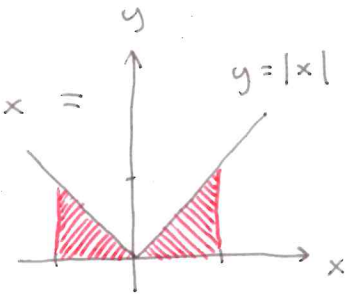
$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \tfrac{1}{4}\left[x^4\right]_0^2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}(2^4 - 0^4) = \tfrac{1}{4}2^4 = 4$$

Ex Beräkna $\int_1^2 x^2\,dx$!

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \tfrac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \tfrac{7}{3}$$

Ex Beräkna $\int_{-1}^1 |x|\,dx$!



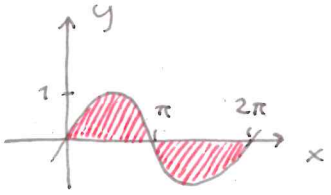
$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 |x|\,dx + \int_0^1 |x|\,dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx =$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(0 - (-1)^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(1^2 - 0\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

Ex Beräkna $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$!



$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\left[\cos x\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

Partialintegration och variabelsubstitution fungerar även för bestämda integraler.

Vid variabelsubstitution:

- måste man också byta integrationsgränserna (mycket viktigt, se demo av testuppgifter)
- behöver man inte byta tillbaka till sist, eftersom resultatet är ett tal, inte en funktion.

Föreläsning 12, del e (demonstration testuppgifter)

3.5 Beräkna med partialintegration

a) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

Lösning: $\int_0^1 \arctan x \, dx = \int_0^1 1 \cdot \arctan x \, dx =$

$= \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx =$

$= (1 \cdot \arctan 1 - 0 \cdot \arctan 0)$

$- \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx =$

$= \arctan 1 - \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{=0} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Svar: $\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

3.6 Beräkna med hjälp av substitution

c) $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx$

Lösning:

Vi testar substitutionen $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$

$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} t^2 = 2t$

Nu måste vi också kolla vad som händer med integrationsgränserna!

$x = 4 \iff t = 2$

$x = 1 \iff t = 1$

$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx = \int_{x=1}^{x=4} \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx =$

$= \int_{t=1}^{t=2} \frac{1}{t^2+t} \frac{dx}{dt} \, dt = \int_{t=1}^{t=2} \frac{2t}{t^2+t} \, dt$

$= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} \, dt = 2 \left[\ln(t+1) \right]_1^2 =$

$= 2 \left(\ln(2+1) - \ln(1+1) \right) = 2 (\ln 3 - \ln 2) =$

$=$ (räkneregler för logaritmer!) $=$

$= 2 \ln \frac{3}{2} \left(= \ln \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right)$

Svar: $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \, dx = 2 \ln \frac{3}{2}$