1. *Logik.* Det logiska konnektiv som svarar mot *eller* skrivs som bekant $\vee$. Här skriver vi $\oplus$ för *exklusivt eller*, alltså $q \oplus s \Leftrightarrow (q \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge s)$. Visa (på valfritt sätt) att nedanstående härledning är korrekt.

1.	$p \to q$
2.	$r \to s$
3.	$q \to \neg s$
4.	$p \vee r$
$\therefore$	$q \oplus s$

Lösning: Först och främst är sanningstabell en möjlig väg att lösa denna uppgift. Eftersom det är fyra utsagor involverade får tabellen $2^4 = 16$ rader. Vi ger inte en sådan lösning här, vi ger istället en lösning genom härledning. Vi skulle vilja använda *Dilemma* med premisserna 1 och 2 och det finns en variant av *Dilemma* som säger att om vi har $p \vee r$, $p \to q$ och $r \to s$ så kan vi dra slutsatsen $q \vee s$ men den är inte en av standardreglerna så vi härleder först två nya premisser som lyder $p \to q \vee s$ respektive $r \to s \vee q$:

5.	p,	antagande för hyp. här.
6.	q,	1, 5, *Modus Ponens* (och 5)
7.	$q \vee s$,	6 (q medför alltid $q \vee s$) (och 5)
8.	$p \to q \vee s$,	5-7 och hyp. här.
9.	r,	antagande för hyp. här.
10.	s,	2, 9, *Modus Ponens* (och 9)
11.	$q \vee s$,	10 (s medför alltid $q \vee s$) (och 9)
12.	$r \to q \vee s$,	9-11 och hyp. här.

Nu har vi de två implikationerna som stämmer överens med den standardmässiga formuleringen av Dilemma så nu kan vi fortsätta.

13.	$q \vee s$,	4, 8, 12, *Dilemma*
14.	$\neg q \vee \neg s$	*Omskrivning av 3*
15.	$(q \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s)$,	13, 14
16.	$((q \vee s) \wedge \neg q) \vee ((q \vee s) \wedge \neg s)$	15, distributiva lagen
17.	$(q \wedge \neg q) \vee (s \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg s) \vee (s \wedge \neg s)$	16, distributiva lagen
18.	$\bot \vee (s \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg s) \vee \bot$	Omskrivning av 17.
19.	$(q \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge s)$	Omskrivning av 18.

Och 19 är precis $q \oplus s$ vilket skulle visas.

2. *Mängdlära.* Låt A, B, C vara tre mängder med $A \subset B$ och $C^c \subset B^c$. Visa att $(B \times C)^c \subset (A \times B)^c$. (*Ledning: för mängder E och F hänger utsagorna $E \subset F$ och $F^c \subset E^c$ ihop ... hur?*)

Lösning: Enligt principen om kontraposition (som för utsagor formuleras $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$) gäller alltid $E \subset F \Leftrightarrow F^c \subset E^c$ och detta kan användas för att omformulera problemställningen till den ekvivalenta "Låt A, B, C vara tre mängder med $A \subset B$ och $B \subset C$. Visa att $A \times B \subset B \times C$". Vi ska alltså visa att om $A \subset B$ och $B \subset C$ så gäller $A \times B \subset B \times C$. Välj därför ett godtyckligt element $(x, y) \in A \times B$, då gäller $x \in A \Rightarrow x \in B$ (eftersom $A \subset B$) samt $y \in B \Rightarrow y \in C$ (eftersom $B \subset C$). Men då har vi alltså $(x, y) \in B \times C$ och vi har alltså visat att $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in B \times C$ för alla (x, y) vilket precis betyder att $A \times B \subset B \times C$ vilket skulle visas. (Enligt kontrapositionsprincipen är det ekvivalent med det som skulle visas.)

3. *Funktioner.* Låt A, B, C vara tre ändliga icke-tomma mängder och låt funktionerna $f : A \to B$, $g : B \to C$ och $h : C \to A$ vara givna. Antag också att $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Om alla dessa funktioner är injektiva, visa att $|A| = |B| = |C| = 4$. (*Ledning: om en funktion $f : A \to B$ är injektiv, vad kan man säga om relationen mellan antal element i A och B?*)

Lösning: Om funktionen $f : A \to B$ är injektiv och A och B är ändliga mängder så må antalet element i B vara $\geq$ antal element i A, annars kan inte olika element alltid avbildas på olika element. Vi har alltså $|A| \leq |B|$. Men precis samma sak gäller $|B|$ och $|C|$ eftersom $g : B \to C$ är injektiv så $|B| \leq |C|$. Och samma sak gäller C och A så att vi sammantaget har de tre olikheterna $|A| \leq |B|$, $|B| \leq |C|$

och $|C| \leq |A|$ och detta ger just $|A| = |B| = |C|$. Vidare ser vi att $|A| = |\{1,2,3,4\}| = 4$ och allt sammantaget innebär $|A| = |B| = |C| = 4$ vilket skulle visas.

4. *Inledande talteori/Aritmetik.* Visa att $6|n^3 - n$ för alla heltal n. *Du behöver inte använda matematisk induktion för detta – men det är ok om du gör det. Missa inte att påståendet ska visas för* ***alla*** *heltal, även de negativa! – om du använder induktion kräver detta lite extra eftertanke.*

Lösning: Vi kan faktorisera $n^3 - n$ som $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ vilket innebär att talet $n^3 - n$ är en produkt av tre på varandra följande tal. Något av dessa tre tal måste vara jämnt, alltså delbart med 2, och något av dessa tre tal måste vara delbart med 3. Hela talet $n^3 - n$ måste alltså vara delbart med både primtalet 2 och primtalet 3. Eftersom 2 och 3 är relativt prima må också talet $n^3 - n$ vara delbart med $2 \cdot 3 = 6$ vilket skulle bevisas.

5. *Relationer.* Definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \cdot y \equiv 1 \pmod 3.$$

Vilka egenskaper har denna relation? Är den *reflexiv*, *symmetrisk*, *anti-symmetrisk* och/eller *transitiv*? För var och en av dessa fyra egenskaper, om den har egenskapen, ge ett bevis för detta. Om den inte har egenskapen, ange exempel på konkreta tal som visar att kravet för egenskapen inte är uppfyllt. Var noggrann med att göra *fullständiga formuleringar* och *inte* skriva saker som $x \cdot y \Leftrightarrow \ldots$ – det går ju inte eftersom $x \cdot y$ är ett *tal.*

Lösning: Relationen är *inte* reflexiv, det kan vi se genom att $3 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 3$ det vill säga vi har hittat $x = 3$ som *inte* uppfyller $x \cdot x \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$. Relationen ä inte heller anti-symmetrisk, det kan vi se genom att konstatera att om $x = 1$ och $y = 4$ så har vi

$$1 \cdot 4 = 4 \equiv 1 \pmod 3, \quad 4 \cdot 1 = 4 \equiv 1 \pmod 3, \quad 1 \neq 4$$

det vill säga $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \wedge x \neq y$, och detta motsäger kravet på antisymmetri som är att implikationen $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ måste gälla för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Relationen är alltså inte anti-symmetrisk.

Relationen är dock både symmetrisk och transitiv och för att visa symmetrin kan vi konstatera att följande kedja av ekvivalenser gäller för alla $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \cdot y \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow y \cdot x \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

eftersom $x \cdot y = y \cdot x$. Men dessa ekvivalenser uttrycker precis egenskapen symmetri. För att visa transitiviteten ska vi visa att för alla tripplar av heltal x, y, z har vi implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

så vi antar att $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$ gäller. Det betyder att följande kongruenser är uppfyllda:

$$x \cdot y \equiv 1 \pmod 3, \qquad y \cdot z \equiv 1 \pmod 3.$$

Vi kan inte ha $x \equiv 0 \pmod 3$, $y \equiv 0 \pmod 3$ eller $z \equiv 0 \pmod 3$ (då kan inte kongruenserna vara uppfyllda). Vi måste alltså ha $x \equiv 1/2 \pmod 3$ (1/2 betyder "1 eller 2"), $y \equiv 1/2 \pmod 3$ samt $z \equiv 1/2 \pmod 3$.

För x och y uppkommer fyra olika fall (vi skriver inte ut $\pmod 3$):
(i) $x \equiv 1$ och $y \equiv 1$. Detta ger $x \cdot y \equiv 1 \cdot 1 = 1$.
(ii) $x \equiv 1$ och $y \equiv 2$. Detta ger $x \cdot y \equiv 1 \cdot 2 = 2$. Men det går inte eftersom vi krävde $x \cdot y \equiv 1$!
(iii) $x \equiv 2$ och $y \equiv 1$. Detta ger $x \cdot y \equiv 2 \cdot 1 = 2$. Men det går inte heller eftersom vi krävde $x \cdot y \equiv 1$!
(iv) $x \equiv 2$ och $y \equiv 2$. Detta ger $x \cdot y \equiv 2 \cdot 2 = 1$.
Av ovanstående fyra fall ser vi alltså att x och y alltid måste ligga i samman kongruensklass. Samma utredning (som följer av kravet $y \cdot z \equiv 1 \pmod 3$) gäller för y och z. Men om x och y alltid måste ligga i samma kongruensklass och y och z också måste ligga i samma kongruensklass så måste alltså x och z ligga i samma kongruensklass, det vill säga vi har antingen fall 1: $x \equiv 1$ och $z \equiv 1$ eller fall 2: $x \equiv 2$ och $z \equiv 2$. I båda fallen gäller $x \cdot z \equiv 1 \pmod 3$ det vill säga $x\mathcal{R}z$ vilket visar transitiviteten.

6. *Fördjupad talteori.* Visa, med matematisk induktion, att för alla positiva heltal ($n = 1, 2, \ldots$) gäller

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k = n^2(n+1).$$

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k = n^2(n+1)$ och kallar $\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - k$ för VL_n respektive $n^2(n+1)$ för HL_n. Vi ska visa $\forall n \geq 1 : A(n)$.

Steg 1. Visa att $A(1)$ gäller, det vill säga visa att $VL_1 = HL_1$. Vi har $VL_1 = \sum_{k=1}^{1} 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$ respektive $HL_1 = 1^2 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2 = 2$ så $VL_1 = HL_1$ och $A(1)$ gäller alltså.
Steg 2. Visa nu att för alla $p \geq 1$ gäller implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$.

(a) Antag alltså $A(p) \Leftrightarrow VL_p = HL_p \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} 3k^2 - k = p^2(p+1)$. (Detta är *induktionsantagandet.*

(b) Visa med stöd av induktionsantagandet att även $A(p+1) \Leftrightarrow VL_{p+1} = HL_{p+1}$ följer. Studera alltså VL_{p+1}:

$$VL_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} 3k^2 - k = \left(\sum_{k=1}^{p} 3k^2 - k\right) + \big(3 \cdot (p+1)^2 - (p+1)\big)$$

och här ser vi att uttrycket innanför de stora parenteserna i själva verket är VL_p så då kan det, enligt induktionsantagandet, ersättas med $HL_p = p^2(p+1)$ och det ger oss alltså:

$$VL_{p+1} = p^2(p+1) + 3 \cdot (p+1)^2 - (p+1)$$

och det här uttrycker skulle kunna räknas ut genom att vi multiplicerar ihop allting, men vi kan också faktorisera och då får vi

$$VL_{p+1} = (p+1) \cdot (p^2 + 3(p+1) - 1) = (p+1)(p+1)(p+2)$$

som kan skrivas som $(p+1)^2(p+1+1)$ vilket helt klart är HL_{p+1}.

(c) Vi har alltså visat implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ vilket fullbordar induktionssteget.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. *Grafteori.* Vi studerar fyra sekvenser av heltal. Dessa sekvenser är

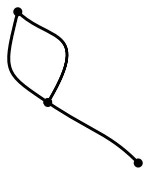
$$1,2,3 \qquad 1,2,3,1 \qquad 1,2,3,2,1 \qquad 1,1,3,2,1.$$

(a) Två av dessa sekvenser kan inte vara gradtalssekvenser hörande till grafer eller pseudografer. Vilka är dessa två sekvenser och varför kan de inte vara gradtalssekvenser?

(b) De andra två sekvenserna hör till ett träd respektive en pseudograf. Rita trädet och pseudografen.

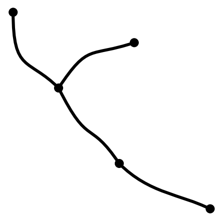
Lösning: De två mittersta sekvenserna kan inte höra till någon graf eller pseudograf eftersom de båda har ett udda antal udda tal (i båda sekvenserna är det 1,3,1 – alltså 3 udda tal). Eftersom antalet udda hörn i en graf (eller pseudograf) måste vara jämnt kan dessa skvenser alltså inte vara gradtalssekvenser till grafer eller pseudografer.

Sekvensen längst till vänster *kan* vara gradtalssekvens till en pseudograf med följande utseende:



här har mittenhörnet gradtalet 3, hörnet längst upp till vänster har gradtalet 2 och hörnet längst ner till höger har gradtalet 1. Vi kan inte ha ett träd med denna sekvens eftersom i ett träd är antalet kanter lika med antalet hörn – 1, antalet kanter här måste vara summan av gradtalen / 2 och det är $(1+2+3)/2 = 3$ och det är inte antalet hörn – 1.

Slutligen kan sekvensen längst till höger vara gradtalssekvens till ett träd som kan ritas på följande sätt:



Detta träds gradtal är 1 för de tre löven, ett hörn har gradtal 2 (det understa av de två hörnen i mitten) och ett hörn har gradtal 3 (det översta av det två mittersta hörnen).

8. *Kombinatorik.* Visa att för alla $n = 1, 2, \ldots$ gäller $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \binom{n}{k} = \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Lösning: Vi kan skriva summan på följande sätt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot 1^{n-k}$$

och då kan dess värde, enligt binomialsatsen, uppfattas som binomialutvecklingen av $\left(\frac{2}{3}+1\right)^n$ som är precis $\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

9. *Sannolikhetslära.* En person ska åka med buss från positionen A till slutdestinationen C. Vi ska beräkna sannolikheten för att personen blir försenad till C.

Resan från A till C innebär ett byte vid B som ligger mellan A och C. Om bussen mellan A och B inte är försenad så hinner personen fram till B då en **bra** tidtabell gäller och då är det bara 10% sannolikhet att personen blir sen till slutdestinationen C. Men om bussen mellan A och B är försenad så kommer personen fram till B då en annan **dålig** tidtabell börjat gälla och då är det 20% sannolikhet att personen blir försenad till C. Sannolikheten att bussen mellan A och B är försenad är 10%.

Beräkna sannolikheten att personen blir försenad till slutdestinationen C.

Lösning: Kalla händelsen att personen blir försenad för F. Vi söker $P(F)$, alltså sannolikheten för F.

Vi inför händelsen att "bussen mellan A och B är försenad" och kallar den E. Då måste antingen E eller E^c inträffa. Lagen om total sannolikhet ger oss då

$$P(F) = P(F|E^c) \cdot P(E^c) + P(F|E) \cdot P(E).$$

Förutsättningarna i texten ger oss följande konkreta värden:

$$P(F|E^c) = 0.10, \qquad P(E^c) = 0.90, \qquad P(F|E) = 0.20, \qquad P(E) = 0.10$$

och sammataget får vi alltså

$$P(F) = 0.10 \cdot 0.9 + 0.20 \cdot 0.10 = 0.09 + 0.02 = 0.11$$

så det är alltså 11% sannolikhet att personen blir försenad.