Föreläsning 5, del a

Integreringsregler (2.4, forts.)

- standardintegraler
- allmänna integreringsregler

Repetition / sammanfattning av förra föreläsningen:

- standardintegraler:

• $\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C \qquad (p \neq -1)$

(speciellt: $\int 1\,dx = \int x^0\,dx = \int dx = x + C$)

• $\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$

- allmänna integreringsregler: (linearitet)

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad$ (k konstant)

Dessa integreringsregler fick vi genom att köra följande deriveringsregler "baklänges": $(D = \frac{d}{dx})$

$D x^{p+1} = (p+1)x^p$

(speciellt $Dx = Dx^{0+1} = (0+1)x^0 = 1$)

$D \ln x = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

$D \ln(-x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x} \qquad (x < 0)$

inre derivata $\frac{d(-x)}{dx} = -1$

$D(F(x) + G(x)) = DF(x) + DG(x) = F'(x) + G'(x)$

$D(kF(x)) = k\,DF(x) = kF'(x)$

Vi ska nu se hur fler deriveringsregler leder till fler integreringsregler.

Föreläsning 5, del b

Deriveringsregler:

$$De^x = e^x$$

$$Da^x = D((e^{\ln a})^x) = D(e^{(\ln a)x}) =$$

$$= \underbrace{(\ln a)}_{\text{inre derivata}} e^{(\ln a)x} = (\ln a)(e^{\ln a})^x = (\ln a)\, a^x$$

$(a>0)$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$D \cot x = D \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Motsvarande integreringregler:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a>0,\ a \neq 1)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C \iff \text{(linearitet!)}$$

$$\int dx + \int \tan^2 x\,dx = \tan x + C \iff$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$$

$$\int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + C \iff \cdots \iff$$

$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C$$

Föreläsning 5, del c

Viktigt specialfall av kedjeregeln (regeln för derivering av sammansatta funktioner):

$$D \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (f(x) \neq 0)$$

Från denna deriveringsregel får vi motsvarande integreringsregel:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C} \qquad (f(x) \neq 0)$$

Vi använder den när vi vill integrera en kvot av två funktioner och täljaren är derivatan av nämnaren. Specialfallet $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ har vi redan sett:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

Då $f(x) = \cos x$ respektive $f(x) = \sin x$ får vi primitiva funktioner till $\tan x$ och $\cot x$ med hjälp av denna regel!

- Då $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x$:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{D\cos x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -\ln|f(x)| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

- Då $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$:

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

Ex $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|f(x)| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(Beloppstecken runt x^2+1 behövs inte eftersom $x^2+1 > 0$ för alla x.)

Annat viktigt specialfall av kedjeregeln:

$$D\,F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a \qquad \left(\begin{array}{c}a \text{ och } b\\ \text{konstanter}\end{array}\right)$$

Om F är en primitiv funktion till f, och $a \neq 0$, så får vi

$$D\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right) = \frac{1}{a}DF(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot a\,F'(ax+b) = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

och integreringregeln

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$$

Ex

- $\int (3x-2)^5\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{1}{5+1}(3x-2)^{5+1} + C =$

  $= \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$

- $\int \tan(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)| + C$

- $\int \frac{dt}{e^t} = \int e^{-t}\,dt = \frac{1}{(-1)}e^{-t} + C = C - \frac{1}{e^t}$

Varning! I allmänhet gäller:

$$\int f(g(x))\,dx \neq \frac{1}{g'(x)}F(g(x)) + C$$

Likheten gäller bara då $g(x)$ är ett förstagradspolynom $g(x) = ax+b$ så att $g'(x) = a$ är konstant. Det finns tyvärr ingen lika allmän integreringsregel som kedjeregeln för derivering.

Ex

$$\int e^{x^2}\,dx \neq \frac{1}{2x}e^{x^2} + C$$

(Den primitiva funktionen till e^{x^2} går inte att uttrycka med hjälp av elementära funktioner.)

Till sist två mycket viktiga standardintegraler, följer direkt från motsvarande deriveringsregler:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad (= -\arccos x + D)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C \qquad (= -\operatorname{arccot} x + D)$$

(där $D = C + \frac{\pi}{2}$ är en integrationskonstant, ska ej förväxlas med deriveringsoperatorn)