Chalmers tekniska högskola Datum: 2020-10-24 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt:
Telefon:

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna om inte annat nämns!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Bestäm för alla värden på $a, b \in \mathbb{R}$ antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ bx + ay + az = 4 \\ bx + by + 2az = 6 \end{cases}.$$ (6 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Finns det en matris H som är högerinvers till både A och B? Om svaret är ja, ange en sådan H. Annars visa att det inte är möjligt att hitta en sådan H. (6 p)

3. Betrakta linjerna $\ell_1 : (0, 3, -6) + s(1, -1, 2), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (3, 4, -5) + t(2, -2, 4), t \in \mathbb{R}$, i rummet. Avgör om det finns ett plan som innehåller ℓ_1 och ℓ_2. Bestäm i så fall ekvationen för planet. (7 p)

4. Låt $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto (7 + 3i)z$ och låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen $f = g^{-1} \circ F \circ g$. Vidare låt A vara avbildningsmatrisen till f. Bestäm nollrummet och kolonnrummet till A. (6 p)

5. Låt T vara triangeln i planet med hörn i $(1, 5)$, $(2, -3)$ och $(-6, 7)$ och låt M vara dess tyngdpunkt. Beräkna det kortaste avståndet från M till en sida i T. (7 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Utelämnat svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0. (6 p)

(a) Antag att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då spänner $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ upp $\mathbb{R}^3$.

(b) Låt A vara en $(m \times n)$-matris. Antag att $A^T A$ inte är inverterbar. Då finns en vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sådan att $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ saknar lösning.

(c) Avståndet mellan linjerna $\ell_1 : (1, 3) + s(1, 2), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (3, 1) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, är $2\sqrt{2}$.

(d) Antag att A och B är $(n \times n)$-matriser och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Vidare antag att $\mathbf{x}'$ är en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och att $\mathbf{x}''$ är en lösning till $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Då är $\mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ en lösning till $(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(e) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \bullet \mathbf{v}$.

(f) Nolldimensionen av $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ är 1.

7. Antag att $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjära avbildningar och att $\mu \in \mathbb{R}$. Visa att $f+g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$, och $\mu f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto \mu f(\mathbf{x})$, är linjära avbildningar.

(6 p)

8. Antag att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth