Lösningsförslag Tentamen SF1629 16e April 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (0,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = x & \text{för } x \in (0,\pi). \end{array} \tag{1}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 1: Variabelseparation, $u(x,t) = X(x)T(t)$, ger att $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\mu$, där vi på sedvanligt sätt sluter oss till att vänster och mittenled måste vara någon konstant μ eftersom VL inte beror på t och mittenledet inte beror på x. Vi kan skirva detta som $T'(t) + 4\mu T(t) = 0$ och

$$\begin{array}{ll} X''(x) + \mu X(x) = 0 & \text{för } x \in (0,\pi) \\ X(0) = X(\pi) = 0, & \end{array} \tag{2}$$

där vi också skrev ut randdata i (2).

Om $\mu = 0$ så kommer (2) att ha lösningen $X(x) = ax + b$ men randdata ger att $0 = X(0) = b$ och $0 = X(\pi) = a\pi + 0$; så vi får endast triviala lösningar vilket är onitressant. På samma sätt så kommer, om $\mu = -\lambda^2 < 0$, lösningarna att bli $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$ vilket insatt i randdata ger att $a = -b$ (eftersom $X(0) = 0$) och $a(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) = 0$ vilket implicerar att $a = b = 0$ eftersom $e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi} \neq 0$ för $\lambda \neq 0$. SÅ vi får endast triviala lösningar om $\mu \leq 0$.

Om $\mu = \lambda^2 > 0$ så kommer lösningen till (2) att bli

$$X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x),$$

vilket insatt i $X(0) = 0$ ger att $a = 0$. Sätter vi in detta i $X(\pi) = 0$ så får vi att $b\sin(\lambda\pi) = 0$. Om λ inte är ett heltal så får vi endast triviala lösningar så vi kan anta att $\lambda = n$ för $n = 1, 2, 3, ...$

Om vi sätter in det i differentialekvationen för $T(t)$ så får vi att $T(t) = \text{konstant} \cdot e^{-4n^2 t}$.

Vi ansätter därför att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-4n^2 t}\sin(nx).$$

För att beräkna b_n så använder vi att om $u(x,t)$ uppfyller initialdata så måste

$$x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \Rightarrow \int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = b_n \int_0^{\pi} \sin^2(nx)dx. \tag{3}$$

Vi beräknar

$$\int_0^{\pi} \sin^2(nx)dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2}dx = \frac{\pi}{2}$$

samt

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\frac{d\cos(nx)}{dx}dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)dx - \frac{1}{n}\left[x\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}.$$

Sätter vi in dessa två integraler i högerled i (3) så följer det att

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Svar fråga 1: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-4n^2 t}\sin(nx).$

2. Lös följande randvärdesproblem på enhetsdisken **D**:

$$\Delta u(r,\phi) = 0 \qquad \text{på } \mathbf{D}$$
$$u(1,\phi) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < \phi < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{för } \phi = 0 \text{ och } \phi = \pi \\ 0 & \text{för } \pi < \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Där Δ är laplacianen definierad enligt:

$$\Delta u(r,\phi) = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial \phi^2}.$$

[4 poäng]

Lösnignsförslag Fråga 2: Vi ansätter variabelseparationen $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ vilket ger oss att

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = \mu.$$

Differentialekvationen för Φ blir

$$\Phi''(\phi) + \mu\Phi(\phi) = 0.$$

Eftersom Ψ måste vara 2π perjodisk så kommer $\mu = 1^2, 2^2, ..., n^2, ...$ och Φ att vara på formen

$$\Phi(\phi) = a_n\cos(n\phi) + b_n\sin(n\phi).$$

Motsvarande lösning för differentialekvationen för $R(r)$ visar att $R(r) = \text{konstant}\cdot r^n$ när $\mu = n^2$.

Vi ansätter därför att lösningen är på formen

$$u(r,\phi) = a_0 + \sum_{n=1} r^n\left(a_n\cos(n\phi) + b_n\sin(n\phi)\right).$$

Vi väljer $a_0, a_1, ..$ och $b_1, b_2, ...$ så att randdata uppfylls. Vi kan t.ex. multiplicera båda led i

$$u(1,\phi) = g(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < \phi < \pi \\ \frac{1}{2} & \text{för } \phi = 0 \text{ och } \phi = \pi \\ 0 & \text{för } \pi < \phi < 2\pi. \end{cases} \tag{4}$$

med $\cos(n\phi)$, $n = 1, 2, ...$, och integrera över $[0, 2\pi)$ för att härleda

$$a_n\int_0^{2\pi}\cos^2(n\phi)d\phi = \int_0^{\phi}\cos(n\phi)d\phi = 0$$

och sluta oss till att $a_n = 0$ för $n = 1, 2, 3, ...$ Här använde vi även att $\cos(n\phi)$ är orthogonal mot $\sin(k\phi)$ för alla $k = 1, 2, 3, ...$ och mot $\cos(k\phi)$ för alla $k = 1, 2, 3, ...$ utom då $k = n$.

Om vi istället multiplicerar båda led i (4) med 1 så får vi att

$$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} 1\cdot a_0 d\phi = \int_0^{\pi} d\phi = \pi.$$

Det följer att $a_0 = \frac{1}{2}$.

Om vi på motsvarande sätt multiplicerar med $\sin(n\phi)$ och integrerar så får vi

$$b_n\int_0^{2\pi}\sin^2(n\phi)d\phi = \int_0^{\pi}\sin(n\phi)d\phi = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{om } n \text{ är udda} \\ 0 & \text{om } n \text{ är jämn.} \end{cases}$$

Eftersom $\int_0^{2\pi}\sin^2(n\phi)d\phi = \pi$ så får vi att

$$b_n == \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{om } n \text{ är udda} \\ 0 & \text{om } n \text{ är jämn.} \end{cases}$$

Om vi använder våra beräknade värden på $a_0, a_1, a_2, ...$ och $b_1, b_2, ...$ så får vi att

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\sin(2k\phi).$$

Att den funktionen uppfyller randdata följer av att Fourierserien konvergerar till medelvärdet av höger och vänster-gränsvärdet i varje punkt för en styckvis kontinuerligt deriverbar funktion; d.v.s. serien konvergerar till randdata för alla ϕ då $r = 1$.

Svar fråga 2:

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\sin(2k\phi).$$

3. Givet att

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{för } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 3 & \text{för } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

är en tempererad distribution (du behöver alltså inte visa detta) beräkna derivatan av f direkt utifrån definitionen av en distributions derivata.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 3: Enligt definitionen så är derivatan för en tempererad distribution f, för varje ϕ i Schwartzklassen,

$$f'[\phi] = -f[\phi'].$$

Vi får därför att

$$f'[\phi] = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx -$$

$$-\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\phi'(x)dx - \int_{\pi/2}^{\infty} 3\phi'(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\phi(x)dx - [\sin(x)\phi(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\infty} 0 \cdot \phi(x)dx - [3\phi(x)]_{x=\pi/2}^{x\to\infty} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\phi(x)dx + 2\delta\pi/2[\phi].$$

Det följer att

Svar: $f' = 2\delta_{\pi/2}(x) + g(x)$ där $g(x)$ definieras

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{för } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{för } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Använd Fouriertransformen för att lösa följande diffrentialekvation

$$\begin{array}{ll} u''(x) - 4u(x) = \delta_0(x) - \delta_2(x) & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0. & \end{array}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 4: Låt oss betrakta lösningen till

$$\begin{array}{ll} v''(x) - 4v(x) = \delta_0(x) & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to\pm\infty} v(x) = 0. & \end{array}$$

Vi vet att[1]

$$\mathcal{F}(v'')(\omega) = -\omega^2 \hat{v}(\omega)$$

och att

$$\mathcal{F}(\delta_0(x))(\omega) = 1.$$

Vi får därför att

$$\hat{v}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 4}$$

vilket enligt formel 7. ger att

$$v(x) = -\frac{1}{4} e^{-2|x|}.$$

Men eftersom derivatan är translationsinvariant så kommer

$$\begin{array}{ll} v''(x-2) - 4v(x-2) = \delta_2(x) & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x\to\pm\infty} v(x) = 0, & \end{array}$$

vilket ger att

$$u(x) = v(x) - v(x-2) = -\frac{1}{4} e^{-2|x|} + \frac{1}{4} e^{-2|x-2|}.$$

Eftersom u går till noll då $x \to \pm\infty$ så är ovanstående beräkningar motiverade.

Svar fråga 4:

$$u(x) = -\frac{1}{4} e^{-2|x|} + \frac{1}{4} e^{-2|x-2|}.$$

[1] Om man inte vet det så kan man sätta in f' i formelsammlingens 6. och göra en partiell integration för att härleda detta.

Del 2.

5. I den här frågan behandlar vi följande egenvärdesproblem

$$\begin{aligned} &y''(x) + \lambda y(x) = 0 \qquad \text{för } x \in (0, \pi/4) \\ &y(0) = y(\pi/4) = 0. \end{aligned}$$

a) Hitta alla egenvärden λ och de till egenvärderna hörande egenfunktionerna y_λ normaliserade så att $\|y_\lambda\| = 1$ (här är $\|y_\lambda\|$ den vanliga L^2 normen på intervallet $(0, \pi/4)$).

[2 poäng]

b) Visa att egenfunktionerna utgör en ortogonal bas för $L^2(0, \pi/4)$. Du får använda alla satser från kursen förutsatt att du kan formulera dem korrekt.

[2 poäng]

Lösningsförslag fråga 5:

a) Observera att egenfunktionerna hittas på samma sätt som i fråga 1. Om $\lambda \le 0$ så ser man lätt att alla lösningar är triviala (se fråga 1). Om $\lambda = \mu^2 > 0$ så är lösningarna till diffekvationen

$$a\cos(\mu x) + b\sin(\mu x).$$

Men $y(0) = 0$ ger att $a = 0$ och $y(\pi/4) = 0$ ger att $\mu = 4n = 4, 8, 12, ...$

Vi får alltså följande egenvärden:

$$\lambda_1 = 16,\ \lambda_2 = 64,\ \lambda_3 = 144,\ ...,\ \lambda_n = 16n^2, ...$$

med motsvarande egenfunktioner

$$y_{\lambda_n} = b_n \sin(\lambda_n x),$$

där b_n väljes så att

$$1 = 1^2 = \|b_n \sin(\lambda_n x)\|^2 = b_n^2 \int_0^{\pi/4} \sin^2(\lambda_n x) dx = b_n^2 \frac{\pi}{8}.$$

Svar fråga 5a: Egenvärderna ges av $\lambda_n = 16n^2$ och motsvarande normaliserade egenfunktioner är

$$y_{\lambda_n}(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sin(\lambda_n x).$$

b) Vi kan formulera *Sturm-Liouvilles Sats: Låt A vara operatorn definierad på*

$$\mathcal{D}_A = \{u \in C^2([a,b]);\ Au \in L^2([a,b]),\ \text{och } u \text{ uppfyller (5)}\}$$

så att

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right),$$

för någon funktion p så att $p(a) \ne 0 \ne p(b)$, och

$$A_0 u(a) + A_1 u'(a) = 0 \quad B_0 u(b) + B_1 u(b) = 0, \tag{5}$$

där inte båda $A_0 = 0$ och $A_1 = 0$ och inte båda $B_0 = 0$ och $B_1 = 0$ gäller. *Då kommer A att ha en oändlig mängd egenvärden*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ... \to \infty$$

så att motsvarande egenfunktioner utgör en fullständig bas för vektorrummet $L^2([a,b])$.[2]

Om vi väljer $A_0 = B_0 = 1$, $A_1 = B_1 = 0$, $[a,b] = [0, \pi/4]$ samt $p = 1$ så kan vi applicera satsen på vårt problem och satsen säger direkt att egenfunktionerna utgör en bas för $L^2([0, \pi/4])$.

[2] I boken så formuleras satsen lite mer generellt än jag formulerat den här, men den här enklare formuleringen räcker för den här uppgiften.

6. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar L^1 funktion på $\mathbb{R}$. Visa att

$$f(t_0) = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega.$$

Du får antaga att alla funktioner är integrerbara och att det är oproblematiskt att byta ordning på integraler.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6: Detta är Sats 7.5 sidan 171 i Vretblad.

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-xs}dx$
2. $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
5. Låt $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \end{cases}$ då är $\mathcal{L}(f(x-T)\theta(x-T))(s) = e^{-Ts}\mathcal{L}(f(x))(s)$.
6. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
7. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
8. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
9. $\int_0^\infty \frac{\sin(Ax)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ för $A > 0$.
10. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$

Lycka Till!