Föreläsning 16, del 6

Kom ihåg: Om ett andragradspolynom $r^2 + pr + q$ har nollställen r_1 och r_2 så kan det faktoriseras $r^2 + pr + q = (r - r_1)(r - r_2)$.

Motsvarande "polynom" $D^2 + pD + q$ i $D = \frac{d}{dx}$ kan faktoriseras på samma sätt:

$$D^2 + pD + q = (D - r_1)(D - r_2)$$

Vi kan använda detta för att härleda den allmänna lösningen till den homogena linjära diffekvationen

$$y'' + py' + qy = 0 \iff$$

$$(D^2 + pD + q)y = 0 \iff$$

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0 \iff$$

sätt: $z(x) = (D - r_2)y(x) = y'(x) - r_2 y(x)$

$$(D - r_1)z = 0 \iff z' - r_1 z = 0 \iff$$

(integrerande faktor: $e^{-r_1 x}$)

$$-r_1 e^{-r_1 x} z + e^{-r_1 x} z = 0 \iff$$

$$D(e^{-r_1 x} z) = 0 \iff e^{-r_1 x} z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{C} \iff z = Ce^{r_1 x}$$

$$z(x) = Ce^{r_1 x} \iff$$

$$y'(x) - r_2 y(x) = Ce^{r_1 x} \iff$$

(integrerande faktor: $e^{-r_2 x}$)

$$-r_2 e^{-r_2 x} y(x) + e^{-r_2 x} y'(x) = Ce^{r_1 x} e^{-r_2 x} \iff$$

$$D(e^{-r_2 x} y(x)) = Ce^{(r_1 - r_2)x} \iff \left(\begin{matrix}\text{om} \\ r_1 - r_2 \neq 0\end{matrix}\right)$$

$$e^{-r_2 x} y(x) = \frac{C}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2)x} + B \iff$$

ny konstant

$$y(x) = \frac{C}{r_1 - r_2} e^{r_1 x - r_2 x + r_2 x} + Be^{r_2 x}$$

$$= Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad \text{där } A = \frac{C}{r_1 - r_2}$$

Vi har alltså kommit fram till att om det karakteristiska polynomet $r^2 + pr + q$ har två olika nollställen $r_1 \neq r_2$ så har den homogena linjära diffekvationen

$$y'' + py' + qy = 0$$

den allmänna lösningen $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ där A och B är godtyckliga konstanter.