FX-SKRIVNING, CM1000:TEN1 – DISKRET MATEMATIK, JANUARI 2020

Tillåtna hjälpmedel: Ett A4-papper med egna *handskrivna* anteckningar, anteckningar på båda sidorna är tillåtet. Inga datorutskrifter och inga miniräknare. Förstås inga smart watches eller andra elektroniska kommunikationsmedel.

DELAR

Skrivningen består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden – med undantag för problemområde 4 som alla har klarat (och en ytterligare modifikation som anges nedan). Skrivningen får skrivas av de personer som har högst fyra delområden icke-avklarade och målet är förstås att alla nio delområden ska vara avklarade efteråt. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens kontrollskrivningar respektive tentamen behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade.

Om på ordinarie tentamen, en student försökt få ett högre betyg, till exempel C, men saknar en eller några delområden och hen klarar samtliga nio delområden i och med denna FX-skrivning så sker kompletteringen upp till betyget C. (Analoga regler gäller för andra högre betyg.)

Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar.

God nyhet! Två av uppgifterna (nummer 5, den om relationer och nummer 9, den som sannolikhetslära) förekommer i *två* olika varianter, kallade uppgift 5a och 5b respektive 9a och 9b. För att få motsvarande område godkänt räcker det med att lösa *en* av a-uppgiften och b-uppgiften, om du tycker att den ena är för svår eller konstig, så kan du välja den andra. Du får dock *inte* göra båda! Då rättas *ingen* av uppgifterna!

Problem

1. *Logik.* Antag att utsagorna p, q, r uppfyller de tre kraven $p \wedge q \to r$ och $q \wedge r \to p$ respektive $p \wedge r \to q$. Gäller då $p \leftrightarrow q$ och $q \leftrightarrow r$? Varför? Varför inte? (Uppgiften får lösas på valfritt sätt.)

2. *Mängdlära.* Antag att mängderna A, B, C uppfyller de tre kraven $A \cap B \subset C$ och $B \cap C \subset A$ respektive $A \cap C \subset B$. Måste vi då ha $A = B = C$? Om det är så, ge ett bevis för detta. Om det inte är så ge exempel på tre mängder A, B, C som uppfyller de tre kraven men ändå inte $A = B = C$. Uppgiften får *inte* lösas med hänvisning till Venndiagram, ett *logiskt hållbart argument* måste presenteras. (Sen kan du förstås rita Venndiagram för att undersöka problemställningen.)

3. *Funktioner.* Låt E, F, G vara givna mängder och låt funktionerna $f : E \to F$ respektive $g : F \to G$ vara givna. Betrakta påståendet

$$f \text{ är surjektiv och } g \text{ är surjektiv} \Rightarrow g \circ f \text{ är surjektiv.}$$

Påståendet är antingen sant eller falskt. Om det är sant, bevisa det. Om det är falskt, ge exempel på tre mängder E, F, G och två funktioner f, g där funktionerna $f : E \to F$ respektive $g : F \to G$ är surjektiva men där $g \circ f$ inte är surjektiv.

5a. *Relationer – a-uppgiften.* Sätt $A = \{1, 2, 3\}$ och bilda relationen $\mathcal{R}$ på A genom att sätta

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Ge en utredning av vilka egenskaper relationen $\mathcal{R}$ har av *reflexivitet*, *symmetri*, och *antisymmetri.* (Vi **bortser** från *transitivitet*), det vill säga om relationen har en viss egenskap, ge ett bevis för detta respektive om relationen inte har en viss egenskap, bevisa det. (Eftersom $\mathcal{R}$ är explicit given av en mängd behövs alltså inga beräkningar.)

5b. *Relationer – b-uppgiften.* Låt A vara en icketom mängd och låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A. Det finns en möjlighet att $\mathcal{R}$ är icke-reflexiv och symmetrisk och antisymmetrisk, det är fallet om vi väljer $\mathcal{R} = \emptyset$. Det blir förstås en *löjlig* relation: *inga* element relaterar till varandra alls! Men frågan är, finns det någon *annan* relation än $\emptyset$ som har dessa egenskaper: icke-reflexiv, symmetrisk och antisymmetrisk? Om svaret är JA, ge ett exempel på en sådan relation $\mathcal{R}$ (med tillhörande mängd $A \neq \emptyset$). Om svaret är NEJ, visa varför. (Då behöver du alltså ge ett bevis av varför en relation $\mathcal{R}$ som är icke-reflexiv, symmetrisk och antisymmetrisk uppfyller $\mathcal{R} = \emptyset$).

6. *Fördjupad talteori.* Använd matematisk induktion för att bevisa att att för alla heltal $n \geq 4$ gäller

$$2^{n+1} \cdot n! > 5^n.$$

7. *Grafteori.* Bevisa att om ett träd har ett löv så måste det ha ett löv till. *(Ledning: antag motsatsen det vill säga att det finns ett träd med bara ett löv. Vad kan du då säga om alla andra hörns gradtal? Använd det för att hitta en motsägelse.)*

8. *Kombinatorik.* Du har tre kulor, en röd och två blåa. Du har också tre urnor, U_1, U_2 och U_3. På hur många olika sätt kan du placera ut kulorna i de tre urnorna om du inte skiljer på kulor med samma färg? Du får lägga hur många kulor som helst i varje urna.

9a. *Sannolikhetslära – a-uppgiften.* Vi har tre urnor, U_1, U_2 och U_3. Den första urnan innehåller tre kulor, en gul, en blå och en röd. Den andra urnan innehåller en gul och en blå kula. Den sista urnan innehåller en gul kula. Vi drar en kula ur varje urna så att vi får tre kulor. Beräkna sannolikheten att det bland dessa tre dragna kulor finns minst två kulor med samma färg.

9b. *Sannolikhetslära – b-uppgiften.* Studenten Alex har studerat inför tentamen i diskret matematik och har ett delområde kvar (det är samma examinationsform som i den här kursen med nio delområden). Det brukar komma två olika typer av frågor på delområdet som Alex har kvar och vi kallar typerna av uppgifter som kan komma för typ A respektive typ B. Alex favorituppgift är uppgifter av typ A och det är 80% chans att Alex klarar en sådan uppgift. Det är dock bara 50% chans att Alex klarar en uppgift av typ B. Det är säkert att någon av typerna A och B kommer att komma och det är 60% chans att det blir en uppgift av typ A. Beräkna sannolikheten att Alex klarar uppgiften som examinerar delområdet.