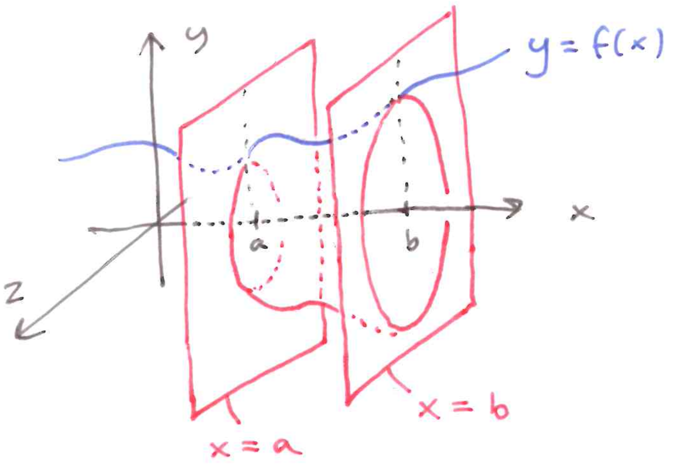
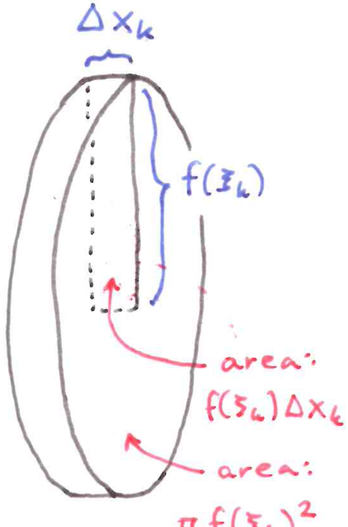
Föreläsning 13, del d

Låt f vara en kontinuerlig funktion på $[a, b]$. Då kurvan $y = f(x)$ roterar kring x-axeln alstras en rotationsyta, som tillsammans med planen $x = a$ och $x = b$ innesluter en kropp.

Vad är volymen av kroppen?





För varje $n = 1, 2, \ldots$ gör vi en indelning av $[a, b]$ i n delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

där $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

sådan att längden av det längsta delintervallet går mot noll då $n \to \infty$. För varje $n = 1, 2, \ldots$ har vi då en Riemannsumma

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

där $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ och $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

$f(\xi_k)\Delta x_k$: arean av en smal rektangel med höjd $f(\xi_k)$ och bred Δx_k

$\pi f(\xi_k)^2$: arean av en cirkelskiva med radie $f(\xi_k)$

$\pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k$: volymen av en tunn cylinder med cirkelskiva med radie $f(\xi_k)$ som bottenyta, och höjd Δx_k (en tunn skiva av rotationskroppen)

Det verkar rimligt att definiera volymen av rotationskroppen som gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k = \underline{\pi \int_a^b f(x)^2\,dx}$$

Likheten följer av att $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)^2 x_k$ är en Riemannsumma för funktionen $f(x)^2$, och denna följd av Riemannsummor går mot $\int_a^b f(x)^2\,dx$ då $n \to \infty$ (se Föreläsning 11!)