Flervariabelanalys: Sammanfattning av läsvecka 1

Jhanzaib Humayun David Selin Tor Schürmann Samuel Jakobsson
Alvin Ånestrand Joakim Karlsson

6 februari 2020

1 Första- och andragradsytor

1.1 Förstagradsytor

En linje i $\mathbb{R}^2$ har en ekvation som kan skrivas: $ax + by = c$. Motsvarigheten i $\mathbb{R}^3$ är ett plan. Det har ekvationen:

$$ax + by + cz = d \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{1}$$

där punkten (x_0, y_0, z_0) ligger på planet. Ekvationen (1) kan skrivas om som skalärprodukt mellan vektorn (a, b, c) och $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Då fås $(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Detta kan geometriskt tolkas som att vektorn (a, b, c) är ortogonal mot planet.

1.2 Andragradsytor

Några vanliga andragradskurvor är ellipser, parabler och hyperbler. Ekvationerna för dessa är:

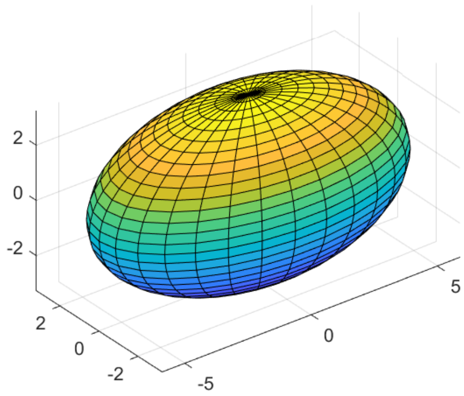
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y = ax^2 + bx + c \ \text{ respektive } \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där a, b och c är konstanter. Ett specialfall är att ellipsen är en cirkel och då fås ekvationen: $x^2 + y^2 = r^2$, där r är radien på cirkeln. Alla dessa andragradskurvor har motsvarande yta i rummet som heter: ellipsoid, paraboloid och hyperboloid. Dessa har ekvationerna:

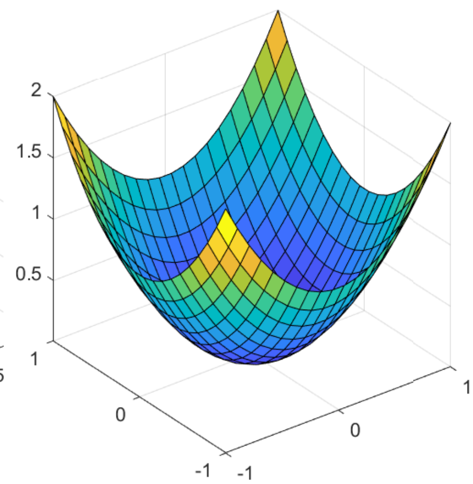
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ \text{ respektive } \ z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

där a, b och c är konstanter. Figurer 1a, 1b och 1c visar exempel på en ellipsoid, en paraboloid respektive en hyperboloid. Något som är värt att nämna är att det alltid går att rita en yta i rummet genom att låta z vara fri. Ett exempel på detta visas i figur 1d där ekvationen är $x^2 + y^2 = 1$ (z fri). Den sista andragradsytan som man borde känna till är en kon. Den har ekvationen $z^2 = c^2(x^2 + y^2)$, där c är en konstant. Figur 1e illustrerar hur en kon kan se ut.

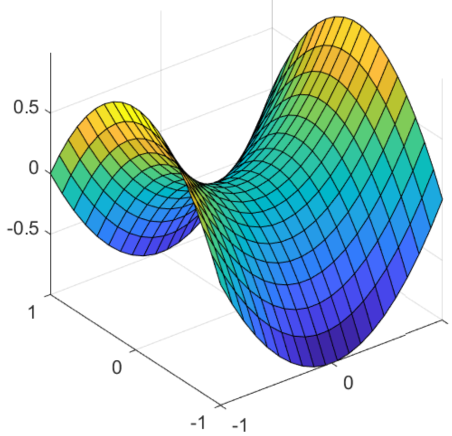
Ett trick man kan använda för att visualisera 3D grafer är att fixera z. Till exempel kan vi fixera z i ekvationen $z^2 = c^2(x^2 + y^2)$, som beskriver en kon. Då kan ekvationen skrivas om till $x^2 + y^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$, vilket påminner om en cirkels ekvation. Här är $\frac{z}{c}$ radien som ökar linjärt då z ökar. Så man kan visualisera cirklar ovanpå varandra och deras radie ökar linjärt med z, vilket är samma som en kon.



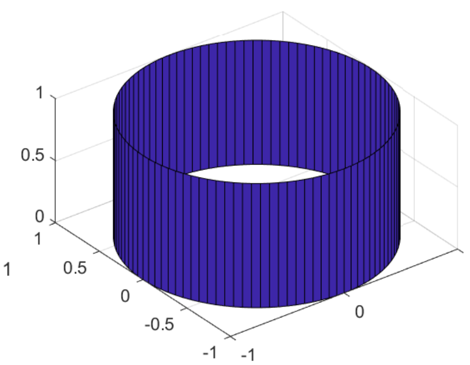
(a) Exempel på en ellipsoid



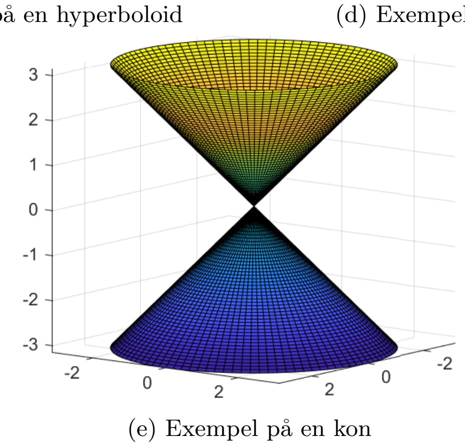
(b) Exempel på en paraboloid



(c) Exempel på en hyperboloid



(d) Exempel på en cylinder



(e) Exempel på en kon

2 Differentierbarhet och partiella derivator

Definition (Partiell derivata). Låt $f\colon D \to \mathbb{R}$ vara en reellvärd funktion där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd. Låt vidare $\boldsymbol{e}_k$ vara vektorn i $\mathbb{R}^n$ med en etta på plats k och nollor på alla andra ställen. Då definieras den *partiella derivatan* med avseende på x_k i punkten $\boldsymbol{a} \in D$ som gränsvärdet

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a}) = f_{x_k}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a})}{h}, \tag{2}$$

om det existerar.

Definition (Differentierbarhet). Låt $f\colon D \to \mathbb{R}$ vara en reellvärd funktion där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en öppen mängd. Låt vidare $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Funktionen f sägs vara *differentierbar* i en punkt $\boldsymbol{a} \in D$ om det existerar en vektor $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n$ och en funktion $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{h} + \|\boldsymbol{h}\|\, \rho(\boldsymbol{h}), \tag{3}$$

gäller i en omgivning av $\boldsymbol{a}$, och $\rho(\boldsymbol{h}) \to 0$ då $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$.

Sats 1. Om f är differentierbar i $\boldsymbol{a}$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$.

Sats 2. Om vektorn $\boldsymbol{A}$ i (3) innehåller element $A_1, \ldots, A_n$ så är $A_k = f_{x_k}(\boldsymbol{a})$.

Sats 3. Låt D vara en öppen mängd och

$$\mathcal{C}^1(D) = \{f\colon D \to \mathbb{R} \mid \text{alla } f\text{:s partiella förstaderivator är kontinuerliga i hela } D\}. \tag{4}$$

Då gäller att $f \in \mathcal{C}^1(D) \implies f$ är differentierbar i hela D.

3 Gradient och riktningsderivata

3.1 Gradient

Enligt Sats 2 gäller att $\boldsymbol{A}$ i (3) är vektorn vars komponenter är f:s partiella derivator i punkten $\boldsymbol{a}$. Vektorn $\boldsymbol{A}$ kallas också för f:s gradient i $\boldsymbol{a}$ och kan betecknas som $\operatorname{grad}(f)(\boldsymbol{a})$ eller $\nabla f(\boldsymbol{a})$. Den senare beteckningen kommer användas här.

3.2 Riktningsderivata

Låt f vara en funktion med en öppen definitionsmängd. Riktningsderivatan av f i riktning av enhetsvektorn $\hat{u}$ i punkten $\boldsymbol{a}$ inom definitionsmängden betecknas $\frac{\partial f}{\partial u}(\boldsymbol{a})$ och $f_u(\boldsymbol{a})$, och definieras av $\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\hat{u})-f(\boldsymbol{a})}{h}$.

Sats 4. Om f är differentierbar så ges f:s riktningsderivata i $\boldsymbol{a}$ i riktning av enhetsvektorn $\hat{u}$ av skalärprodukten mellan f:s gradient i $\boldsymbol{a}$ och $\hat{u}$, d.v.s $f_u(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{u}$.

Bevis. Vi använder definitionen av att f är differentierbar i $\boldsymbol{a}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\hat{u}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot h\hat{u} + \|h\hat{u}\|\, \rho(h\hat{u})}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot h\hat{u}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\|h\hat{u}\|\, \rho(h\hat{u})}{h} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{u} + \lim_{h\to 0} \frac{\|h\hat{u}\|\, \rho(h\hat{u})}{h}.$$

Vektorn $\hat{u}$ är en enhetsvektor och har alltså längden 1. Det innebär att $h\hat{u}$ har längden h och $\|h\hat{u}\| = |h|$. Vi kan därför förkorta bort h,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|h\hat{u}\|\,\rho(h\hat{u})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|\rho(h\hat{u})}{h} = \pm \lim_{h\to 0} \rho(h\hat{u}). \tag{5}$$

Eftersom $h\hat{u} \to \mathbf{0}$ då $h \to 0$ får vi enligt ρ:s definition att

$$\lim_{h\to 0} \pm \lim_{h\to 0} \rho(h\hat{u}) = 0. \tag{6}$$

Därmed är

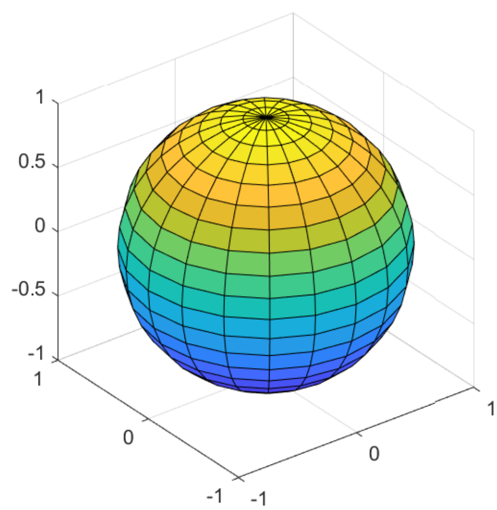
$$f_u(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{u}. \tag{7}$$

4 Nivåytor

Definition. Givet en funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ och $f(\boldsymbol{a}) = c$ (där $\boldsymbol{a} \in D$ och $c \in \mathbb{R}$) så sägs $\boldsymbol{a}$ tillhöra nivåytan $f(\boldsymbol{x}) = c$. Annorlunda uttryckt så är nivåytan på nivå c

$$\Pi_c = \{\boldsymbol{x} \in D \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}. \tag{8}$$

Ett tydligt exempel på en nivåyta är ytan av en sfär. Ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ beskriver en sfär med radien r. Funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$:s nivåytor, $f(x, y, z) = r^2$, utgörs alltså av sfärer.



Figur 2: Punkterna på denna sfärs yta utgör en nivåyta till $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4.1 Sats om tangentplan till nivåyta

Sats 5. Om f är en differentierbar funktion och $\boldsymbol{a}$ är en punkt på nivåplanet Π_c så är $\nabla f(\boldsymbol{a})$ en normalvektor till tangentplanet Π_c^* till Π_c i punkten $\boldsymbol{a}$.

Ett simpelt men ej rigoröst "bevis" följer: Eftersom alla punkter på Π_c uppfyller $f(\boldsymbol{x}) = c$ så är differensen mellan två punkter på Π_c:s funktionsvärden 0. Detta innebär att derivatan i en punkt på Π_c också är 0, om riktningen tangerar Π_c. Därav om $\hat{u}$ är en godtycklig riktningsvektor i Π_c^* följer

$$f_u(\boldsymbol{a}) = 0 \implies \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \hat{u} = 0 \implies \nabla f(\boldsymbol{a}) \perp \hat{u}. \tag{9}$$

Eftersom $\nabla f(\boldsymbol{a})$ är rätvinklig till alla möjliga $\hat{u}$ som ligger i Π_c^*, så följer det att $\nabla f(\boldsymbol{a})$ är normalvektor till Π_c^*, VSV.

5 Kedjeregeln

5.1 Kedjeregeln i envariabelanalys

Om $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbara funktioner av en variabel så säger kedjeregeln att sammansättningen av f och g, $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, är en deriverbar funktion och

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t). \tag{10}$$

5.2 Kedjeregeln "Steg 1"

Om $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion av en variabel och $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion av n variabler så är sammansättningen $f \circ g$ en differentierbar funktion av n variabler. Dessutom gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ g)(x_1, \ldots, x_n) = f'(g(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}. \tag{11}$$

5.3 Kedjeregeln "Steg 2"

Om $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion av n variabler och om de n funktionerna $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är differentierbara, så är sammansättningen $f(g_1(t)), \ldots, g_n(t))$ (som är en funktion av en variabel) differentierbar. Dess derivata i punkten t ges av

$$\frac{d}{dt} f(g_1(t), \ldots, g_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \cdot \frac{dg_i}{dt}. \tag{12}$$

5.4 Kedjeregelen "Steg 3"

Om $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion av n variabler och om de n funktionerna $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är differentierbara så är sammansättningen $f(g_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_m))$ differentierbar. Låt $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m)$. Den partiella derivatan med avseende på t_i ges då av

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f(g_1(\boldsymbol{t}), \ldots, g_n(\boldsymbol{t}))) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(\boldsymbol{t}), \ldots, g_n(\boldsymbol{t})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_i}. \tag{13}$$

5.5 Användning av kedjeregeln för variabelbyte i en PDE

Lösandet av en partiell differentialekvation kan ibland underlättas av att införa nya variabler. Variabelbytet från (x, y) till $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$ ger att de partiella derivatorna transformeras enligt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{14}$$

6 Högre ordningens partiella derivator

Notation för högre ordningens partiella derivator: $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$.

Definition. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd. Vi definierar då mängden $\mathcal{C}^k(D)$ som:

$$\mathcal{C}^k(D) = \left\{ f\colon D \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ och alla } f\text{:s partiella derivator upp till} \\ \text{och med ordning } k \text{ är kontinuerliga i } D \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Sats 6. Om $f \in \mathcal{C}^k(D)$ spelar "ordningen" ingen roll i en partiell derivata av f av ordning $\leq k$.

Enligt Sats 6 gäller exempelvis att om $f = f(x, y, z)$ tillhör $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ så är $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xxz} = f_{xzx}$ och $f_{xyz} = f_{zxy}$.