Matriser och matrisoperationer i MATLAB

1 Inledning

I den andra laborationen såg vi på matriser och hur vi bygger upp dem. Vi såg också på hur man använder dem för att beskriva linjära ekvationssystem. I den här laboration skall vi se på några funktioner av matriser och vektorer samt operationer på matriser, matris-vektorprodukt samt matris-matrisprodukt.

2 Matris- och vektorfunktioner

Vi ser nu på några användbara inbyggda funktioner som tar matriser eller vektorer som argument. För exemplen använder vi följande matris och vektorer.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \\ 9 & 12 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

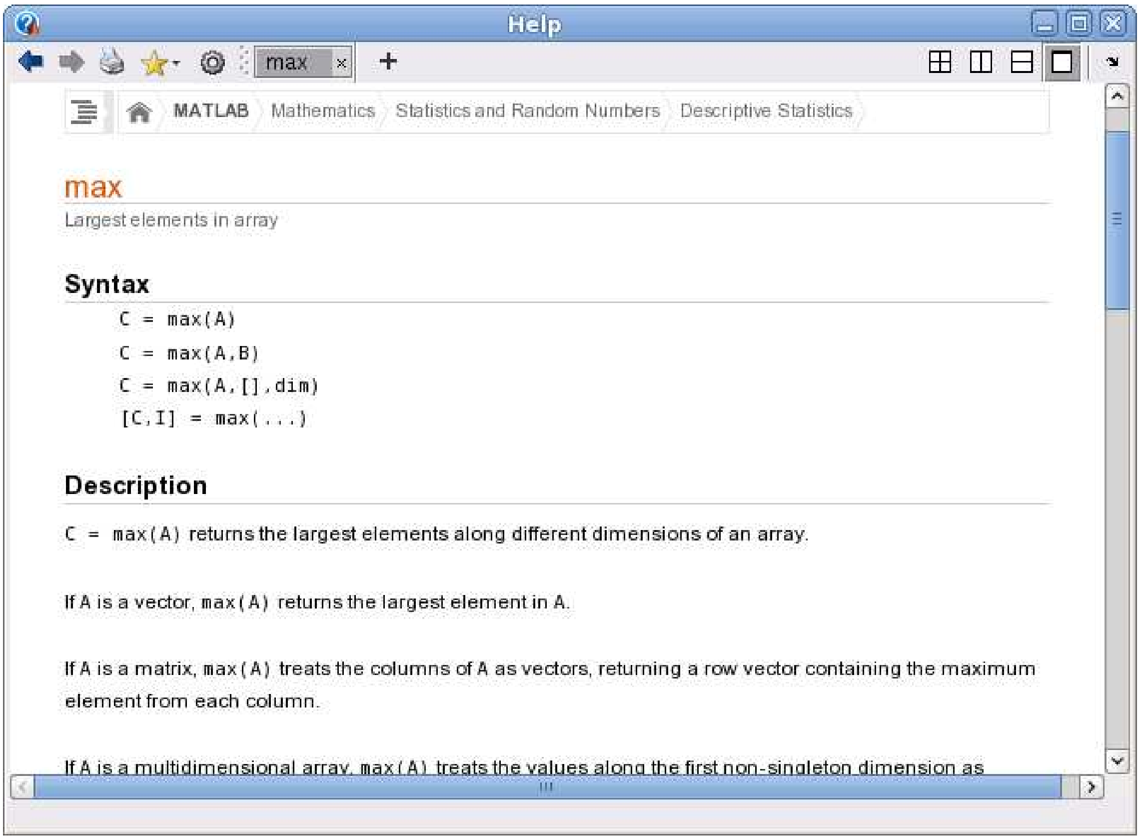
Antalet rader och kolonner i $\mathbf{A}$ får vi med

```
>> [m,n]=size(A)
m =
     3
n =
     4
```

och antal element i vektorn $\mathbf{c}$ ges av

```
>> l=length(c)
l =
    5
```

Största eller minsta elementet i en vektor eller en matris får man med funktionerna `max` och `min`. Här är hjälptexten till `max`.



Vi ser hur vi får största elementet i en vektor och hur vi får de största elementen i varje kolonn för en matris.

```
>> v=max(c)
v =
     8

>> v=max(A)
v =
    11    12     8    10
```

Vi ser också att vi med `[v,i]=max(c)` kan få reda på var det maximala värdet finns någonstans.

Uppgift 1. Skriv in matrisen **A** samt vektorerna **b** och **c** vi använt som exempel. Pröva `size` på vektorerna **b** och **c**. Hur ser man att den ena är en kolonnvektor och att den andre är en radvektor? Bestäm största och minsta elementet i matrisen **A** med hjälp av funktionerna `max` och `min`. Vad har dessa element för rad- respektive kolonnindex?

Summan och produkten av elementen i vektorn fås med `sum` och `prod`. För en matris blir det summan eller produkten av varje kolonn.

```
>> s=sum(b)
s =
      9

>> s=sum(A)
s =
    22    22    12    22
```

I första laborationen beräknade vi en summa $s = 3 + 4 + 5 + \cdots + 52$ med en `for`-sats, vi skulle även kunna beräkna den med `sum` enligt

```
>> s=sum(3:52)
s =
        1375
```

Detta kallas att vektorisera beräkningen.

Vi kan också dela upp i två satser

```
>> t=3:52;      % Bildar en vektor t med 3, 4, ..., 52
>> s=sum(t)     % Summerar alla element i vektorn t
s =
        1375
```

Först bildar vi vektorn `t` med elementen $3, 4, \cdots, 52$ och sedan summerar vi elementen i vektorn.

Uppgift 2. Beräkna summan $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ med `sum` och komponentvis kvadrering.

Vill vi sortera en vektor i stigande ordning gör vi det med funktionen `sort`. För en matris blir det varje kolonn som sorteras. För att sortera i avtagande ordning se hjälptexten för `sort`.

3 Operationer på matriser

Matris-vektorprodukten $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ av en $m \times n$-matris och en n-kolonnvektor är en m-kolonnvektor som ges av

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}}$$

eller elementvis

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Matris-vektorprodukten $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kan beräknas i MATLAB med den inbyggda matrismultiplikationen (`*`) enligt `y=A*x` eller med lite egen programmering (som bygger upp `y` elementvis)

```
>> y=zeros(m,1);
>> for i=1:m
       s=0;
       for j=1:n
           s=s+A(i,j)*x(j);
       end
       y(i)=s;
   end
```

Här måste `A` och `x` redan skrivits in i MATLAB. Även `m` och `n`, som ger matrisens typ, måste ha värden eller ges värden med `[m,n]=size(A)`.

Ett alternativt sätt att introducera matris-vektorprodukt är att definiera $\mathbf{Ax}$ som en linjärkombination av kolonnerna i $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix}\mathbf{a_1} & \cdots & \mathbf{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} =$$

$$= \begin{bmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}a_{12}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix} x_n$$

I MATLAB skulle vi, för t.ex. $n = 3$, skriva

```
>> y=A(:,1)*x(1)+A(:,2)*x(2)+A(:,3)*x(3)
```

och för ett större värde på n skulle vi kunna bilda linjärkombinationen enligt

```
>> y=zeros(m,1);
>> for j=1:n
       y=y+A(:,j)*x(j);
   end
```

Matris-matrisprodukten $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ av en $m \times n$-matris $\mathbf{A}$ och en $n \times p$-matris $\mathbf{B}$, med kolonner $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p$, är en $m \times p$-matris som ges av

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p] = [\mathbf{Ab}_1, \cdots, \mathbf{Ab}_p]$$

eller elementvis

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n$$

Matrismultiplikationen $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ kan beräknas i MATLAB med den inbyggda matrismultiplikationen (`*`) enligt `C=A*B` eller med lite egen programmering (som bygger upp `C` elementvis)

```
>> C=zeros(m,p);
>> for i=1:m
       for j=1:p
           cij=0;
           for k=1:n
               cij=cij+A(i,k)*B(k,j);
           end
           C(i,j)=cij;
       end
   end
```

Alternativt bygger vi upp kolonnvis enligt

```
>> C=zeros(m,p);
>> for j=1:p
       C(:,j)=A*B(:,j);
   end
```

Här använder vi den inbyggda matris-vektormultiplikationen för att bilda kolonnerna.

Uppgift 3. Skriv in följande matriser i MATLAB.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna följande produkter, både för hand, dvs. med penna och papper, och med MATLAB, dvs. med inbyggda matrismultiplikationen ($*$),

$$\mathbf{Ax}, \quad \mathbf{Bx}, \quad \mathbf{AB}, \quad \mathbf{ax}, \quad \mathbf{xa}, \quad \mathbf{aB}.$$

Beräkna produkten $\mathbf{Ax}$ även genom att ni skriver en egen programkod i MATLAB. Skriv snyggt och tydligt.

Uppgift 4. Bilda matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a). Kontrollera att associativa och distributiva lagarna gäller för dessa matriser.

Du skall alltså se att $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ respektive $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ och $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.

(b). Vanligtvis är matrismultiplikation inte kommutativ. T.ex är $\mathbf{AC} \neq \mathbf{CA}$ och $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$ (kontrollera gärna), men vad gäller för $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$?