LINJÄR ALGEBRA FÖR MEKANIK 1

ULF GRAN

Här är en kortfattad genomgång av de delar av linjär algebra man behöver kunna tillämpa i mekaniken. Se även appendix C/7 i boken, vilket innehåller många bra grafiska illustrationer, eller Wikipedia om det är något enstaka begrepp ni vill ha mer information om. En stor fördel med linjär algebra i två och tre dimensioner (till skillnad från i t ex 10 och 11 dimensioner där min forskning äger rum ☺) är att de flesta objekt (enhetsvektorer, vektorer, längder etc) och operationer (skalär- och vektorprodukt) går att *visualisera*, utnyttja detta! Nedan behandlas oftast det (allmänna) tredimensionella fallet; för det tvådimensionella fallet ta helt enkelt bort z-komponenterna (OBS vektorprodukten är inte definierad i två dimensioner!).

1. Skalärer vs vektorer

Skalära storheter beskrivs fullständigt av ett *tal*, t ex massa, area, volym, energi, etc. För att beskriva en vektoriell storhet, som både har en *storlek* (eller *längd*) och en *riktning*, t ex hastighet, acceleration etc, behövs två tal i två dimensioner, och tre tal i tre dimensioner. I tre dimensioner kan vi skriva en vektor i *komponentform*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

där vi har angivit två vanliga alternativa sätt att beteckna komponenterna i vektorn (A_1 vs A_x etc). Från vektorn i komponentform är det tydligt att tre tal behövs för att beskriva vektorn. Ibland, t ex då man löser vissa mekaniktal, kan det vara bättre att beskriva vektorn som en *enhetsvektor* (beskrivs i tre dimensioner av två tal eftersom längden är bestämd), dvs en vektor med längd 1, och vektorns längd (beskrivs av ett tal) som multiplicerar enhetsvektorn.

Viktigt att notera är att en *kraft* inte enbart beskrivs av en *kraftvektor*, dvs storleken och riktningen hos kraften, utan även *angreppspunkten* behöver specificeras.

2. Vektorer, baser, norm etc

För enkelhets skull behandlar vi ett cartesiskt koordinatsystem, dvs ett koordinatsystem i vilket basvektorerna $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ och $\hat{\boldsymbol{k}}$ är ortogonala och konstanta i rum och tid. Basvektorer betecknas med en hatt och är *alltid* normerade, dvs har längd 1. Vi väljer också alltid basvektorer som bildar ett högersystem, dvs $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ och $\hat{\boldsymbol{k}}$ pekar

Date: 18 december 2013.

längs högerhandens tumme, pek- och långfinger (i denna ordning). Med andra ord använder vi alltid en *högerortonormerad* bas.

Längden, eller *normen*, av en vektor $\boldsymbol{A}$ ges av[1] $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}$. Enligt denna definition är längden alltid positiv.

Vektorer kan multipliceras med skalärer samt adderas med varandra, dvs vi kan bilda linjärkombinationer av vektorer

$$\boldsymbol{X} = \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B} \ ,$$

där $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ är vektorer och α och β skalärer (dvs tal). Detta kan visualiseras med hjälp av *parallellogramlagen* för vektoraddition (se appendix C/7).

En godtycklig vektor kan skrivas som en linjärkombination av basvektorerna multiplicerade med skalärer

$$\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z \hat{\boldsymbol{k}}$$

där $A_x = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}$ etc. A_x kallas för vektorns *x-komponent*, medan $A_x \hat{\boldsymbol{\imath}}$ kallas för en av vektorns *komposanter*. Observera att detta sätt att dela upp en vektor längs basvektorerna endast fungerar för en ortonormerad bas; om man vill dela upp en vektor längs riktningar som inte är ortogonala måste man lösa ett ekvationssystem (se föreläsningsanteckningarna).

Ofta behöver man bestämma vektorn som går mellan två givna punkter. Detta kan enkelt göras med hjälp av "till minus från"-regeln, dvs koordinaterna vektorn pekar till minus koordinaterna den pekar från ger vektorns komponenter med rätt tecken.

Givet en godtycklig vektor $\boldsymbol{A}$ kan man alltid bilda en enhetsvektor som pekar i $\boldsymbol{A}$s riktning genom uttrycket $\boldsymbol{A}/\sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}$, där talet i nämnaren är $\boldsymbol{A}$s längd. Detta är ibland användbart i problem där man t ex vet riktningen på en sökt kraftvektor, men inte dess storlek, och därför kan skriva kraftvektorn som storleken (den sökta storheten) gånger en enhetsvektor i samma riktning som kraften.

3. Skalär- och vektorprodukt

Utöver att bilda linjärkombinationer finns det två andra viktiga operationer för att givet två vektorer bilda en skalär eller en ny vektor. Den första operationen är *skalärprodukt*, vilken som namnet antyder kombinerar två vektorer till en skalär. I komponentform gäller (i en högerortonormerad bas) att

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ .$$

Den andra operationen är *vektor- eller kryssprodukt*, vilken kombinerar två vektorer till en ny vektor enligt

[1] Se nedan för definitionen av skalärprodukt

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x_3y_1 - x_1y_3)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{\boldsymbol{k}} \ ,$$

där determinanten lämpligen räknats ut med *Sarrus regel*, vilken är lätt att komma ihåg, och den resulterande vektorn är vinkelrät mot planet som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ och riktad enligt högerhandsregeln.

För högerortonormerade basvektorer $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ och $\hat{\boldsymbol{k}}$ gäller följande räkneregler

$\cdot$	$\hat{\boldsymbol{\imath}}$	$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$	$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\hat{\boldsymbol{\imath}}$	1	0	0
$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$	0	1	0
$\hat{\boldsymbol{k}}$	0	0	1

$\times$	$\hat{\boldsymbol{\imath}}$	$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$	$\hat{\boldsymbol{k}}$
$\hat{\boldsymbol{\imath}}$	0	$\hat{\boldsymbol{k}}$	$-\hat{\boldsymbol{\jmath}}$
$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$	$-\hat{\boldsymbol{k}}$	0	$\hat{\boldsymbol{\imath}}$
$\hat{\boldsymbol{k}}$	$\hat{\boldsymbol{\jmath}}$	$-\hat{\boldsymbol{\imath}}$	0

Då man löser mekaniktal, och t ex ska räkna ut ett moment givet en kraftvektor och en ortsvektor, är det mycket snabbare att räkna ut vektorprodukten med Sarrus regel ovan.

Den geometriska tolkningen av skalärprodukt är att den ger *projektionen* av en vektor på en riktning. Detta kan ses från att skalärprodukten också kan skrivas som

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\| \cos(\theta) \ ,$$

där θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$. Hur mycket $\boldsymbol{A}$ pekar längs $\boldsymbol{B}$, dvs projektionen av $\boldsymbol{A}$ på *riktningen* som ges av $\boldsymbol{B}$, fås av[2]

$$A_B := \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B}/\|\boldsymbol{B}\|) \ .$$

Notera att det är viktigt att ta skalärprodukten med en *enhetsvektor* längs den riktning man vill projicera på eftersom skalärprodukten beror på längden av båda vektorerna. Vektorn $\boldsymbol{B}$ kan t ex vara en av basvektorerna.

Det finns även en geometrisk tolkning av vektorprodukt (längden av den resulterande vektorn ges av arean av parallellogrammet med sidorna $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$), men den är inte så viktig i mekanik där vektorprodukt främst används för att beräkna moment från kraft- och ortsvektorer.

4. Linjära ekvationssystem

Jämviktsekvationerna (kraft- och/eller momentjämvikt) i x-, y- och z-led ger oss en *vektorekvation* som (för kraftjämvikt) schematiskt kan skrivas som

$$\boldsymbol{F}^{(1)} + \boldsymbol{F}^{(2)} + \boldsymbol{F}^{(3)} + \ldots = \boldsymbol{0} \ ,$$

där $\boldsymbol{F}^{(i)}$ är alla de krafter som verkar på en viss delkropp vid friläggning och $\boldsymbol{0}$ i högerledet är noll-vektorn. För att lösa denna ekvation är det ofta en bra idé att

[2] Symbolen := betyder att detta är en definition.

skriva den i komponentform i en lämplig bas, t ex i en cartesisk högerortonormerad bas, vilket i tre dimensioner blir

$$\begin{pmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \end{pmatrix} + \ldots = 0 \ .$$

Eftersom basvektorerna är linjärt oberoende måste x-, y- och z-komponenterna summera till noll var för sig och vektorekvationen kan därför ekvivalent skrivas som tre oberoende skalära ekvationer

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + \ldots &= 0 \ , \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + \ldots &= 0 \ , \\ F_3^{(1)} + F_3^{(2)} + F_3^{(3)} + \ldots &= 0 \ . \end{aligned}$$

I de problem som dyker upp i mekanikkursen räcker det oftast att göra enkla linjärkombinationer av ekvationerna för varje komponent ovan för att lösa ekvationerna, vilket gör dem lätta att lösa.