Tentamen SF1632 13e Augusti 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1632.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (-\pi,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \text{för } x \in (-\pi,\pi). \end{array} \tag{1}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 1: Vi gör en variabelseparation och ansätter $u(x,t) = X(x)T(t)$. Vi får då ekvationen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \pm\lambda^2, \tag{2}$$

där vi, enligt standardargumentet, har observerat att eftersom VL endast betor på x och mittenledet endast på t så måste dessa sammanfalla med en konstant som vi kallar $\pm\lambda^2$. Det är enkelt att inse att vi måsta ha minustecken framför λ^2 om vi vill ha icketriviala lösningar.[1]

Vi kan därför skriva om (2) enligt

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 = T'(t) + \lambda^2 T(t).$$

Vi får därför att $T(t) = ce^{-\lambda^2 t}$ för någon konstant c och $X(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$.

Funktionen $X(x)$ skall även uppfylla randdata

$$X(-\pi) = X(\pi) = 0$$

vilket ger

$$\begin{array}{c} a\cos(\lambda\pi) - b\sin(\lambda\pi) = 0 \\ a\cos(\lambda\pi) + b\sin(\lambda\pi) = 0. \end{array}$$

Eftersom initialdata är udda så kan vi sätta $a = 0$ och får därför att, om X inte är en trivial lösning så måste, $\lambda\pi = n\pi$ för något heltal n. D.v.s. $\lambda = 1, 2, 3, ...$

Vi får därför att

$$X(x)T(t) = bce^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Lösningen till initialvärdesproblemet borde därför kunna skrivas som

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t}\sin(nt), \tag{3}$$

för några koefficienter c_n. För att hitta c_n så multiplicerar vi initialdata med $\sin(nx)$ och integrerar från $-\pi$ till π

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)dx. \tag{4}$$

För att beräkna VL i (4) så använder vi (3) och att $\sin(nx)$ och $\sin(mx)$ är orthogonala i $L^2(-\pi,\pi)$ då $n \neq m$ och får därför att

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x,0)\sin(nx)dx = c_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = c_n\pi.$$

[1] Annars så kommer, om $\lambda \neq 0$, $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$ vilket endast har den triviala lösningen med randdata $X(\pi) = X(-\pi) = 0$, om $\lambda = 0$ så blir lösningen en linjär funktion vilka också måste vara noll funktionen för att randdata skall uppfyllas.

För att beräkna HL i (4) så använder vi tricket att $-\frac{1}{n^2}\frac{d^2\sin(nx)}{dx^2} = \sin(nx)$ och partiell integration

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi x)\frac{d^2\sin(nx)}{dx^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\pi x)\frac{d\sin(nx)}{dx}dx + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(\pi^2) =$$

$$= -\frac{\pi^2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)dx + \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(\pi^2).$$

Om vi flyttar runt lite termer så leder detta till

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)dx = \frac{2(-1)^{n+1}n}{n^2+\pi^2}\sin(\pi^2).$$

Vi får därför att

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}n}{(n^2+\pi^2)\pi}\sin(\pi^2).$$

Detta ger oss att lösningen till initialgärdesproblemet är: **Svar:**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}n}{(n^2+\pi^2)\pi}\sin(\pi^2)e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

2. **a)** Definiera inre produkten på rummet $L^2([-1,1])$.

[1 poäng]

b) Låt $f(x) = 1+x$ och $g(x) = x + ax^2$ vara två funktioner i $L^2([-1,1])$. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att f och g är orthogonala i $L^2([-1,1])$.

[1 poäng]

c) Låt a vara som i deluppgift **b)** och beräkna projektionen av $\sin(x)$ på delrummet av $L^2([-1,1])$ som spänns upp av f och g.

[2 poäng]

Lösningsförslag Fråga 2:
a) Vi definierar den inre produkten på $L^2(-1,1)$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

(För realvärda funktioner så behövs inte komplexkonjugatet och därför så kommer saknad av komplexkonjugat inte att ge poängavdrag.)

b) Om f och g är orthogonala så kommer $\langle f, g\rangle = 0$ vi ska alltså välja a så att inre produkten är noll.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (1+x)(x+ax^2)dx = \frac{2(a+1)}{3},$$

vilket är noll då $a = -1$.

Svar: f och g är orthogonala om $a = -1$

c) Om $h(x) = \sin(x)$ så får vi att projektionen av $h(x)$ på rumet som spänns upp av f och g ges av

$$\frac{\langle h, f\rangle}{\|f\|^2}f + \frac{\langle h, g\rangle}{\|g\|^2}g.$$

Vi beräknar

$$\langle h, f\rangle = \int_{-1}^{1} \sin(x)(x+1)dx = 2(\sin(1) - \cos(1)),$$

$$\langle h, g\rangle = 2(\sin(1) - \cos(1)),$$

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} (1+x)^2 dx = \frac{8}{3}$$

och

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx = \frac{4}{15}.$$

Svar: Projektionen är

$$\frac{3}{4}(\sin(1)-\cos(1))(1+x) + \frac{15}{2}(\sin(1)-\cos(1))(1-x^2).$$

3. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

med hjälp av Plancherels formel.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 3: Plancherels formel säger att[2]

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \tag{5}$$

Enligt formel 5 så är

$$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}$$

vilket insatt i (5) ger att

$$\frac{4}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega = \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = 1.$$

Vi får därför följande

Svar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4. Låt $g(x) = e^{-2x}H(x)$, där H är Heaviside funktionen. Hitta en funktion f så att

$$\widehat{f * g}(\omega) = \frac{3}{2+i\omega} e^{-4\omega^2}.$$

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 4: Faltningsformeln för Fouriertransformen säger att

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Vi kan beräkna

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} H(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\omega)x} dx = \frac{1}{2+i\omega}.$$

Vi får därför att

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\frac{1}{2+i\omega} = \frac{3}{2+i\omega} e^{-4\omega^2}.$$

D.v.s. att

$$\hat{f}(\omega) = 3e^{-4\omega^2}. \tag{6}$$

Enligt formelsammlingen så kommer, för $a > 0$,

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

Med $a = \frac{1}{16} > 0$ så får vi att

$$\mathcal{F}\left(\frac{3}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{16}}\right)(\omega) = 3e^{-4\omega^2}. \tag{7}$$

Om vi jämför (6) och (7) samt använder att Fouriertransformen är inverterbar, och därför injektiv, så får vi

Svar:

$$f(x) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{16}}$$

---

[2] Eftersom ni inte har formelsamling så kommer inga poäng att dras för om man har fel på faktorn $\frac{1}{2\pi}$

Del 2.

5. I den här uppgiften så är $\delta_z(x)$ Diracs deltafunktion med stöd i z: d.v.s. för varje begränsad och kontinuerlig funktion $\phi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta_z(x)dx = \phi(z).$$

Och $H(x)$ är Heaviside funktionen.

a) Låt $z > 0$ vara ett givet tal. Visa att

$$y(x) = H(x-z)\left(e^{2(x-z)} - e^{x-z}\right)$$

är en lösning, i distributionsmening, till följande differentialekvation:

$$\begin{array}{ll} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \delta_z(x) & \text{för } x > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0. & \end{array}$$

[2 poäng]

b) Låt $0 < z_1 < z_2 < z_3 < ....$ och $z_n \to \infty$. Hitta en lösning till följande differentialekvation

$$\begin{array}{ll} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\delta_{z_n}(x) & \text{för alla } x > 0 \\ y(0) = -1 \text{ och } y'(0) = 0. & \end{array}$$

[1 poäng]

c) Förklara noga vart du använder antagandet att $z_n \to \infty$ i deluppgift **b)**.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 5:

a) Låt ϕ vara en testfunktion med kompakt stöd. Då kommer

$$y'[\phi] = -y[\phi'] = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)H(x-z)(e^{2(x-z)} - e^{x-z})dx =$$
$$= -\int_z^{\infty} \phi'(x)(e^{2(x-z)} - e^{x-z})dx =$$
$$= \phi(z)\underbrace{(e^{2(z-z)} - e^{z-z})}_{=0} + \int_z^{\infty} \phi(x)(2e^{2(x-z)} - e^{x-z})dx,$$

vi ser att y' kan identifieras med funktionen

$$y'(x) = H(x-z)(2e^{2(x-z)} - e^{x-z}).$$

På samma sätt kan vi beräkna $y''[\phi] = -y'[\phi']$

$$y''[\phi] = -\int_z^{\infty} \phi'(x)(2e^{2(x-z)} - e^{x-z})dx =$$
$$= \phi(z)\underbrace{(2e^{2(z-z)} - e^{z-z})}_{=1} + \int_z^{\infty} \phi(x)(4e^{2(x-z)} - e^{x-z})dx$$

så y'' kan identiferas som

$$y'' = \delta_z + H(x-z)(4e^{2(x-z)} - e^{x-z}).$$

Om vi sätter in detta i differentialekvationen så får vi

$$y'' - 3y' + 2y = \delta_z + H(x-z)\left(4e^{2(x-z)} - e^{x-z} - 3(2e^{2(x-z)} - e^{x-z}) + 2(e^{2(x-z)} - e^{x-z})\right) = \delta_z$$

vilket skulle visas.

b) Den homogena lösningen ges av $y_h(x) = -e^{2x} + e^x$, vilket enkelt inses då det karakteristiska polynomet, $r^2 - 3r + 2$, har rötterna 2 och 1 samt initialdata uppfylls av y_h. Vi får därför, genom superpositionsprincipen, att

$$y(x) = -e^{2x} + e^x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} H(x-z_n)\left(e^{2(x-z_n)} - e^{x-z_n}\right) \tag{8}$$

är en lösning förutsatt att serien konvergerar.

Men **c)** eftersom $z_n \to \infty$ så kommer det att finnas ett N_x så att om $n > N_x$ så kommer $z_n > x$ vilket innebär att $H(x - z_n) = 0$, d.v.s. serien i (8) är en ändlig summa för varje x och därför konvergent.

6. **a)** Definiera vad det innebär för $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ att vara en följd av positiva integrationskärnor (Positive summation kernels).

[1 poäng]

b) Låt $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd positiva integrationskärnor definierade på $\mathbb{R}$ och $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vara en begränsad och kontinuerlig funktion. Bevisa att för varje $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} K_n * \phi(x) = \phi(x).$$

[3 poäng]

Lösningsförslag Fråga 6: Detta är Theorem 2.1 sidan 22 i Vretblad med bevis.

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-xs}dt$
2. $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
6. $\mathcal{F}(e^{-at^2})(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ för $a > 0$
7. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
8. $\int_0^\infty \frac{\sin(Ax)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ för $A > 0$.
9. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$

Lycka Till!