Föreläsning 14, del c

Differentialekvationer (5.1)

En (ordinär) differentialekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion $y(x)$ av en variabel x, och dess derivator $y'(x)$, $y''(x)$, ... En lösning till en differentialekvation är alltså en funktion, inte ett tal.

Massor av tillämpningar inom fysik, kemi, biologi, ekonomi ... !

En differentialekvation av ordning $n = 1, 2, \ldots$ innehåller derivator av högst ordning n.

Vi har redan lärt oss i flera olika fall hur man löser en första ordningens differentialekvation av typen $y'(x) = f(x)$ där $f(x)$ är en känd funktion.

Vi kallade då varje lösning y för en primitiv funktion till f, och införde beteckningen $\int f(x)\,dx$ (obestämd integral) för mängden av alla oändligt många lösningar.

Annat exempel på en första ordningens differentialekvation: $y'(x) = y(x)$

Till skillnad från den förra har vi nu även en y-term (utan derivator) men ingen term som är en känd funktion av x.

Vi söker alltså en funktion y som är sin egen derivata: $y' = y$. Även i detta fall finns det oändligt många lösningar: $y(x) = Ce^x$ där C är en konstant.

Högre ordningars differentialekvationer av typen $y''(x) = f(x)$, $y'''(x) = f(x)$, ... kan (i bästa fall) lösas genom upprepad integration. Varje integration ger en ny konstant!

Ex) Lös differentialekvationen $y''(x) = 3$!

$$y''(x) = 3 \iff y'(x) = 3x + C \iff y(x) = \frac{3}{2}x^2 + Cx + D$$

där C och D är godtyckliga konstanter.

Den allmänna lösningen till en differentialekvation av ordning n innehåller n godtyckliga konstanter (oändligt många speciella lösningar).