Föreläsning 10, del b

Hur integrerar vi sedan varje term

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{och} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} \quad ?$$

- Om $n=1$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$$

- Om $n \geq 2$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

Termer med $(x^2+px+q)^m$ i nämnaren: Kvadratkomplettera andragradspolynomet!

$$x^2+px+q = x^2 + 2\tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{4}p^2 + q =$$

(kvadreringsregeln!) $= \left(x+\frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q =$

$$= \left(x+\tfrac{1}{2}p\right)^2 + \left(q - \tfrac{1}{4}p^2\right) = \left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2 + \alpha$$

där $\alpha = q - \frac{1}{4}p^2$

Vi kan anta att $\alpha > 0$, annars hade andragradspolynomet x^2+px+q kunnat faktoriseras till en produkt av två förstagradspolynom.

- Om $m=1$:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\alpha}\,dx = \left(\begin{array}{l} t = x+\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = t-\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array}\right)$$

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+\alpha}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2+\alpha}\,dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{t^2+\alpha}\,dt$$

$$= \frac{A}{2}\ln|t^2+\alpha|$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\alpha}} + C$$

(se Föreläsning 8, del c-d)

- Om $m \geq 2$: partialintegration! (Vi går ej in på detta!)