Föreläsning 6, del d

Ibland när man partialintegrerar får man tillbaka samma integral som man hade från början (eller nästan samma).

Ex Beräkna $\int e^x \sin(2x)\,dx$!

Vi väljer att integrera e^x och derivera $\sin 2x$:

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = e^x \sin(2x) - \int e^x (2\cos(2x))\,dx =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,dx \qquad (1)$$

Vi partialintegrerar en gång till:

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = e^x \cos(2x) - \int e^x(-2\sin(2x))\,dx =$$

$$= e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\,dx \qquad (2)$$

Vi fick tillbaka samma integral som vi hade från början! Ingen mening med att fortsätta partialintegrera, vi kommer bara att "gå runt i en cirkel". Men det är inte så illa som det kan verka!

Sätt in (2) i (1)!

$$\int e^x \sin(2x) = e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,dx =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2\left(e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,dx$$

$\Leftrightarrow$ (flytta över och lägg till en konstant C)

$$\Leftrightarrow 5\int e^x \sin(2x)\,dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + C$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \sin(2x)\,dx = \underline{\frac{1}{5} e^x\left(\sin(2x) - 2\cos(2x)\right) + C}$$

Man kan också partialintegrera en funktion som inte ser ut som en produkt, genom att "trolla fram" en etta!

Ex $\int (\ln x)\,dx = \int 1\cdot(\ln x)\,dx =$

$$= x\cdot \ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$= \underline{x(\ln x - 1) + C}$$

Kontroll:

$$D(x(\ln x - 1) + C) = 1\cdot(\ln x - 1) + x\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \ln x - 1 + 1 = \underline{\ln x}$$

ok!