Föreläsning 9. del a

Förra gången lärde vi oss att integrera alla rationella funktioner $\frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ är vilket polynom som helst, och $N(x)$ vilket förstagradspolynom som helst, eller ett andragradspolynom av formen

$$N(x) = x^2 + q$$

där q är positivt eller negativt ($q = \alpha$ eller $q = -\alpha$, där $\alpha > 0$) eller noll.

- Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$ så behövde vi först utföra <u>polynomdivision</u>.

- Om $q \geq 0$ så kunde vi använda standardintegralerna

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

tillsammans med allmänna integrationsregler för att integrera $T(x)/N(x)$.

- Om $q < 0$ behövde vi <u>faktorisera</u> polynomet $N(x) = x^2 + q = x^2 - \alpha$:

$$x^2 - \alpha = (x + \sqrt{\alpha})(x - \sqrt{\alpha})$$

Faktoriseringen ledde till att vi kunde skriva den ursprungliga rationella funktionen $T(x)/N(x)$, där $N(x)$ är ett andragradspolynom, som en summa av rationella funktioner där nämnaren är ett förstagradspolynom. Och sådana rationella funktioner är lätta att integrera!

Ex Beräkna $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$!

Vi faktoriserar nämnaren: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$ och betraktar

$$\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = 2\,\frac{1}{x^2-1}.$$

Vi får:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big) + C$$