

Geometrisk tolkning av linjära ekvationssystem

1 Inledning

I denna laboration skall vi se på geometrisk tolkning av linjära ekvationer och system av sådana. Vi skall sedan se hur vi löser linjära ekvationssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ med MATLAB. Vi sätter ihop koefficientmatrisen \mathbf{A} med högerledsvektorn \mathbf{b} i den utökade matrisen $\mathbf{E} = [\mathbf{A} \ \mathbf{b}]$. Med elementära radoperationer kom vi sedan fram till reducerad trappstegsform (rref) genom att räkna för hand eller med `rref` i MATLAB.

2 Linjära ekvationssystem

Vi ser först på ett linjärt ekvationssystem av typen 2×2 , dvs. två ekvationer i två obekanta. Som exempel tar vi

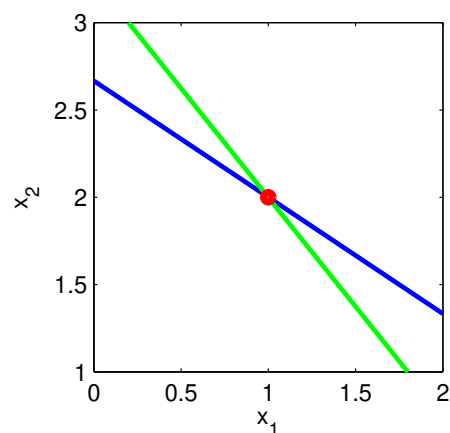
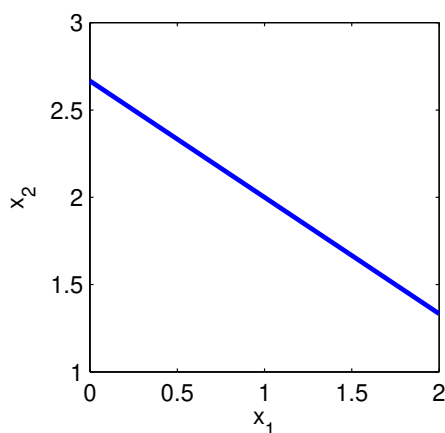
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi ritar lösningarna till första ekvationen (blå linje i figuren nedan till vänster), egentligen ritar vi grafen till den linjära funktionen

$$l_1(x_1) = (b_1 - a_{11}x_1)/a_{12} = (8 - 2x_1)/3, \quad 0 \leq x_1 \leq 2$$

Sedan ritar vi lösningarna till andra ekvationen (grön linje i figuren nedan till höger), genom att rita grafen till

$$l_2(x_1) = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} = (13 - 5x_1)/4, \quad 0 \leq x_1 \leq 2$$



Så här gjorde vi för att rita figurena

```

>> A=[2 3;5 4]; b=[8;13];
>> l1=@(x1)(b(1)-A(1,1)*x1)/A(1,2);
>> l2=@(x1)(b(2)-A(2,1)*x1)/A(2,2);
>> x1=linspace(0,2,2);
>> plot(x1,l1(x1),'b','linewidth',2), hold on
>> plot(x1,l2(x1),'g','linewidth',2)
>> xlabel('x_1'), ylabel('x_2')
>> axis equal, axis([0 2 1 3])

```

Eftersom funktionerna är linjära, dvs. graferna är räta linjer, använder vi bara två x_1 -värden som vi bildar med `x1=linspace(0,2,2)`. (Vi skulle lika väl kunna bilda dem med `x1=[0 2]`.)

Vi beräknar reducerad trappstegsform för hand (gör det gärna) eller med MATLAB enligt

```

>> A=[2 3;5 4]; b=[8;13];
>> R=rref([A b])
R =
     1     0     1
     0     1     2

```

och ritar ut lösningen till systemet av ekvationer, dvs. skärningen mellan linjerna med en röd markör enligt

```

>> x=[1;2];
>> plot(x(1),x(2),'ro','markersize',3,'linewidth',4), hold off

```

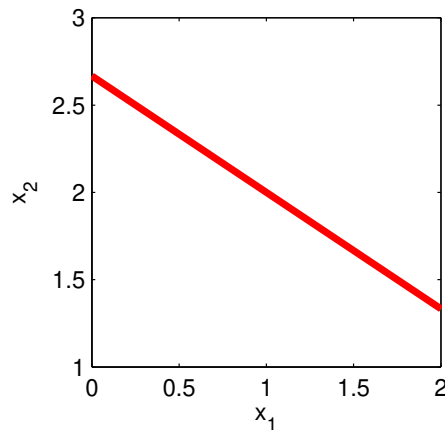
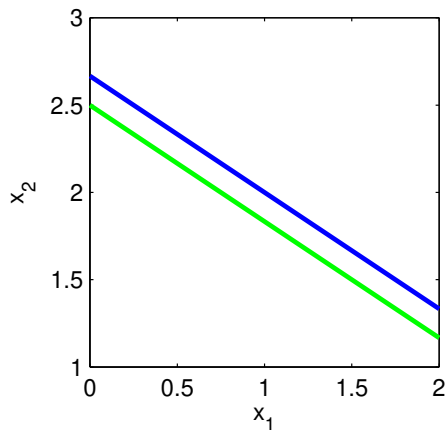
Resultatet ser vi i figuren ovan till höger. Lösningen är skärningspunkten mellan linjerna.

Nu ser vi på ett 2×2 -system som kan ha oändligt många lösningar eller ingen alls, nämligen

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 6x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{där} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

för olika val av b_1 och b_2 .

Vi ritar lösningarna till ekvationerna för t.ex. $b_1 = 8$, $b_2 = 15$ och får den vänstra figuren. Vi ser att vi får två parallella linjer, dvs. systemet saknar lösning.



Om vi istället tar $b_1 = 8$, $b_2 = 16$ får vi den högra figuren. Linjerna ligger på varandra, vi har oändligt många lösningar. I figuren har vi markerat lösningarna med röd färg. (Räknar vi för hand eller symboliskt med MATLAB ser vi att vi saknar lösning då $b_2 \neq 2b_1$, är däremot $b_2 = 2b_1$ så har vi oändligt många lösningar.)

Vi beräknar reducerad trappstegsform med MATLAB för de två fallen:

```
>> A=[2 3;4 6]; b=[8;15];
>> R=rref([A b])
R =
    1.0000    1.5000         0
         0         0    1.0000

>> A=[2 3;4 6]; b=[8;16];
>> R=rref([A b])
R =
    1.0000    1.5000    4.0000
         0         0         0
```

dvs. ingen lösning respektive oändligt många lösningar som ges av $x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 4$ eller med $x_1 = t$ som fri variabel

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{2}{3}(4-t) \end{bmatrix}, \text{ för alla } t \in \mathbb{R}$$

Den röda linjen ritade vi enligt

```
>> xt=@(t) [t; (4-t)/1.5];
>> P=[xt(0) xt(2)];
>> plot(P(1,:),P(2,:), 'r', 'linewidth', 3)
```

Funktionen $\mathbf{xt}(t)$ kan beräknas för vilka t som helst, och vi räknar ut den för $t = 0$ och $t = 2$. Vi sammanför de två vektorerna i matrisen P och ritar med `plot`. Med $P(1, :)$ får vi x_1 -koordinaterna för start- och slutpunkt för linjen och med $P(2, :)$ får vi x_2 -koordinaterna.

Uppgift 1. Betrakta följande linjära ekvationssystem. Gör en geometrisk tolkning motsvarande den vi just gjort.

(a). $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix}$

(b). $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ samt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

Nu ser vi på ett linjärt ekvationssystem av typen 3×3 , dvs. tre ekvationer i tre obekanta. Som exempel tar vi

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi ritar lösningarna till första ekvationen (blått plan), egentligen ritar vi grafen till den linjära funktionen

$$l_1(x_1, x_2) = (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2)/a_{13} = (2 + 4x_1)/2$$

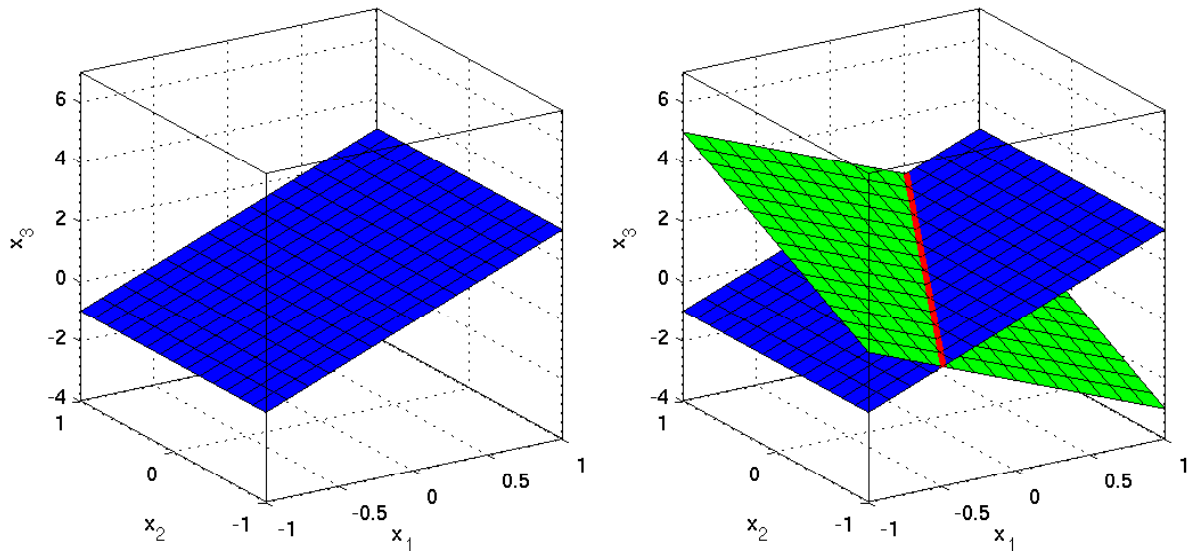
för $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$.

Sedan ritar vi lösningarna till andra ekvationen (grönt plan), genom att rita grafen till

$$l_2(x_1, x_2) = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2)/a_{23} = 1 - 2x_1 + 2x_2$$

för $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$.

I figuren nedan ser vi det blå planet till vänster och till höger ser vi det blå och det gröna planet. Där planen skär varandra är motsvarande ekvationer uppfyllda samtidigt.



Så här ritade vi det blå planet.

```
>> A=[-4 0 2;2 -2 1;1 4 -1]; b=[2;1;-1];
>> l1=@(x1,x2)(b(1)-A(1,1)*x1-A(1,2)*x2)/A(1,3);
>> l2=@(x1,x2)(b(2)-A(2,1)*x1-A(2,2)*x2)/A(2,3);
>> l3=@(x1,x2)(b(3)-A(3,1)*x1-A(3,2)*x2)/A(3,3);
>> x1=linspace(-1,1,30); x2=linspace(-1,1,30);
>> [X1,X2]=meshgrid(x1,x2);
>> surf(X1,X2,l1(X1,X2),'facecolor','b'), hold on
>> xlabel('x_1'), ylabel('x_2'), zlabel('x_3')
>> axis([-1 1 -1 1 -4 7]), axis vis3d, grid on, box on
```

Eftersom grafen $l_1(x_1, x_2)$ är en yta använder vi `surf` istället för `plot`. Med `meshgrid` får vi matriser fyllda med x_1 - och x_2 -koordinater. Att rita ytor kommer vi återkomma till många gånger, så vi kommer vänja oss efter hand.

Vi använder `axis vis3d` så att skalan inte förändras då vi vrider och vänder på grafen, med `rotate3d on` blir det möjligt att ta tag i grafen och vrida den. Med `grid on`, `box on` ökas känslan av tre dimensioner.

Nu ritar vi även det gröna planet.

```
>> surf(X1,X2,l2(X1,X2),'facecolor','g')
```

I figuren ovan till höger ser vi hur det gröna planet skär det blå planet och vi skall rita ut skärningslinjen med ett rött streck. Vi beräknar därför reducerad trappstegsform på de två första raderna i **A** och **b** enligt

```
>> R=rref([A(1:2,:) b(1:2)])
```

R =

```
1.0000    0 -0.5000 -0.5000
    0 1.0000 -1.0000 -1.0000
```

Med $x_3 = t$ som fri variabel får vi lösningarna

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ -1 + t \\ t \end{bmatrix}, \text{ för alla } t \in \mathbb{R}$$

och vi ritar röda linjen med

```
>> xt=@(t)[-0.5+0.5*t;-1+t;t]
>> P=[xt(0) xt(2)];
>> plot3(P(1,:),P(2,:),P(3,:),'r','linewidth',3), hold off
```

Nu ritar vi lösningarna till tredje ekvationen (cyanfärgat plan i figuren nedan), dvs. grafen till

$$l_3(x_1, x_2) = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} = 1 + x_1 + 4x_2$$

för $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$.

Detta gör vi i en ny figur enligt

```
>> figure(2)
>> surf(X1,X2,l1(X1,X2),'facecolor','b'), hold on
>> surf(X1,X2,l2(X1,X2),'facecolor','g')
>> surf(X1,X2,l3(X1,X2),'facecolor','c')
```

Vi beräknar lösningen till systemet

```
>> R=rref([A b])
```

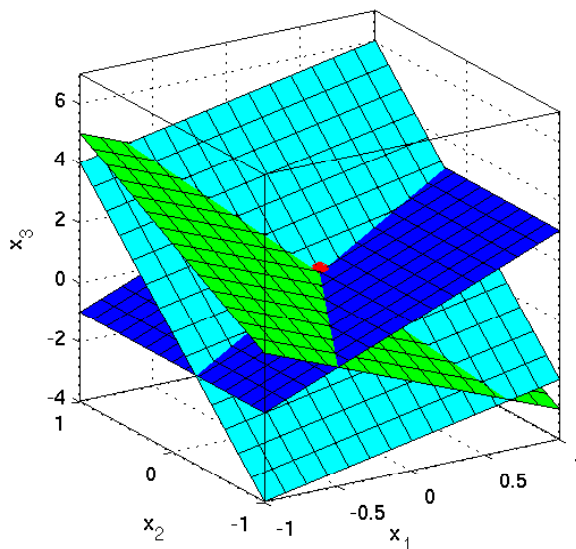
R =

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

och ser att vi har en entydig lösning som vi ritar ut med en röd markör enligt

```
>> x=[0;0;1];
>> plot3(x(1),x(2),x(3),'ro','markersize',5,'linewidth',4)
>> xlabel('x_1'), ylabel('x_2'), zlabel('x_3')
>> axis([-1 1 -1 1 -4 7]), axis vis3d, grid on, box on, hold off
```

Här ser vi resultatet, de tre planen och den punkt där de skär varandra, dvs. lösningen till systemet av ekvationer.



Uppgift 2. Betrakta följande linjära ekvationssystem. Gör en geometrisk tolkning motsvarande den vi just gjort. Skriv även ned (för hand) lösningsmängden på parameterform.

(a). $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b). $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ samt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$