Föreläsning 6, del 6

Ex Beräkna $\int x e^x \, dx$!

Vi testar $f(x) = x$ och $g(x) = e^x$:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F'(x) = f(x) = x$

$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

$$\int x e^x \, dx = \int f(x) g(x) \, dx = \left(\begin{array}{c}\text{partiell} \\ \text{integration}\end{array}\right)$$

$$= F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx$$

Men integralen $\int x^2 e^x \, dx$ är krångligare än den som vi hade från början!

Vi testar att låta f och g byta roller!

Sätt istället $f(x) = e^x$ och $g(x) = x$:

$F(x) = e^x \Rightarrow F'(x) = f(x) = e^x$

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

$$\int x e^x \, dx = \int e^x x \, dx = \int f(x) g(x) \, dx =$$

$$= F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) \, dx =$$

$$= e^x x - \int e^x \cdot 1 \, dx = x e^x - \int e^x \, dx =$$

$$= x e^x - e^x + C = \underline{(x-1) e^x + C}$$

Kontroll:

$$D\big((x-1) e^x + C\big) = D\big((x-1) e^x\big) =$$

$$= D(x-1) e^x + (x-1) D e^x = \qquad \text{ok!}$$

$$= 1 \cdot e^x + (x-1) e^x = e^x + x e^x - e^x = \underline{x e^x}$$

Om en av de två funktionerna i produkten som vi vill integrera är ett polynom så är det ofta smartast att välja att derivera den funktionen (eftersom gradtalet då minskar) och integrera den andra.