Tentamen SF1632 13e Augusti 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1632.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \text{för } x \in (-\pi,\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \text{för } x \in (-\pi,\pi). \end{array} \tag{1}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

2. **a)** Definiera inre produkten på rummet $L^2([-1,1])$.

[1 poäng]

b) Låt $f(x) = 1 + x$ och $g(x) = x + ax^2$ vara två funktioner i $L^2([-1,1])$. Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att f och g är orthogonala i $L^2([-1,1])$.

[1 poäng]

c) Låt a vara som i deluppgift **b)** och beräkna projektionen av $\sin(x)$ på delrummet av $L^2([-1,1])$ som spänns upp av f och g.

[2 poäng]

3. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

med hjälp av Plancherels formel.

[4 poäng]

4. Låt $g(x) = e^{-2x}H(x)$, där H är Heaviside funktionen. Hitta en funktion f så att

$$\widehat{f * g}(\omega) = \frac{3}{2+i\omega} e^{-4\omega^2}.$$

[4 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. I den här uppgiften så är $\delta_z(x)$ Diracs deltafunktion med stöd i z: d.v.s. för varje begränsad och kontinuerlig funktion $\phi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta_z(x)dx = \phi(z).$$

Och $H(x)$ är Heaviside funktionen.

a) Låt $z > 0$ vara ett givet tal. Visa att

$$y(x) = H(x-z)\left(e^{2(x-z)} - e^{x-z}\right)$$

är en lösning, i distributionsmening, till följande differentialekvation:

$$\begin{aligned} &y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \delta_z(x) \quad \text{för } x > 0 \\ &y(0) = y'(0) = 0. \end{aligned}$$

[2 poäng]

b) Låt $0 < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots.$ och $z_n \to \infty$. Hitta en lösning till följande differentialekvation

$$\begin{aligned} &y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\delta_{z_n}(x) \quad \text{för alla } x > 0 \\ &y(0) = -1 \text{ och } y'(0) = 0. \end{aligned}$$

[1 poäng]

c) Förklara noga vart du använder antagandet att $z_n \to \infty$ i deluppgift **b)**.

[1 poäng]

6. a) Definiera vad det innebär för $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ att vara en följd av positiva integrationskärnor (Positive summation kernels).

[1 poäng]

b) Låt $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en följd positiva integrationskärnor definierade på $\mathbb{R}$ och $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vara en begränsad och kontinuerlig funktion. Bevisa att för varje $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} K_n * \phi(x) = \phi(x).$$

[3 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-xs}dt$
2. $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0)$
3. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
6. $\mathcal{F}(e^{-at^2})(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$ för $a > 0$
7. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
8. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(Ax)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ för $A > 0$.
9. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$

Lycka Till!