Föreläsning 11, del c

Def Låt f vara en funktion definierad och begränsad på det slutna intervallet $[a,b]$.

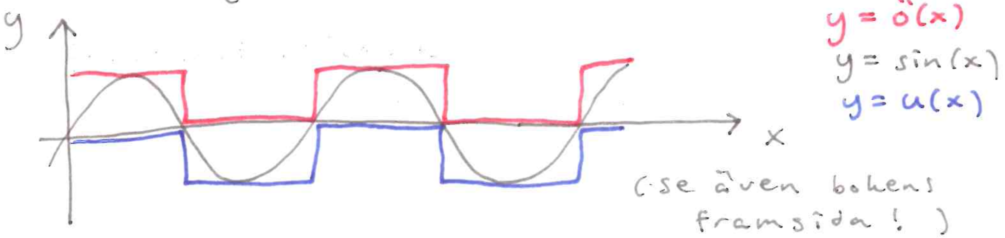
- En överfunktion till f är en trappfunktion $ö(x)$ på $[a,b]$ sådan att
$$ö(x) \geq f(x) \quad \text{för alla } x \in [a,b]$$
- En underfunktion till f är en trappfunktion $u(x)$ på $[a,b]$ sådan att
$$u(x) \leq f(x) \quad \text{för alla } x \in [a,b]$$

Integraler av över- och underfunktioner till f kallas över- och undersummor till f.

Ex Funktionen $\sin x$ har över- och underfunktioner

$$ö(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1 & \text{annars} \end{cases}$$



(se även bokens framsida!)

Def Funktionen f är (Riemann-)integrerbar om det finns precis ett tal I sådant att

$$\int_a^b u(x)\,dx \leq I \leq \int_a^b ö(x)\,dx$$

för alla över- och underfunktioner $ö$ och u.

Talet I kallas för (den bestämda) integralen av f från a till b och betecknas

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= -\int_b^a f(x)\,dx \right)$$

a och b kallas integrationsgränser

Sats Funktionen f är integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns över- och undersummor $ö$ och u sådana att

$$\int_a^b ö(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \varepsilon$$

Satsen säger att f är integrerbar om och endast om grafen kan täckas av rektanglar vars sammanlagda area kan göras godtyckligt liten!

Sats Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$!