Föreläsning 5, del c

Viktigt specialfall av kedjeregeln (regeln för derivering av sammansatta funktioner):

$$D \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (f(x) \neq 0)$$

Från denna deriveringsregel får vi motsvarande integreringsregel:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C} \qquad (f(x) \neq 0)$$

Vi använder den när vi vill integrera en kvot av två funktioner och täljaren är derivatan av nämnaren. Specialfallet $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ har vi redan sett:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$$

Då $f(x) = \cos x$ respektive $f(x) = \sin x$ får vi primitiva funktioner till $\tan x$ och $\cot x$ med hjälp av denna regel!

• Då $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = \sin x$:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$= -\int \frac{D\cos x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = -\ln|f(x)| + C =$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

• Då $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$:

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$$

Ex $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|f(x)| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(Beloppstecken runt x^2+1 behövs inte eftersom $x^2+1 > 0$ för alla x.)