Föreläsning 4, del a

Primitiva funktioner och obestämda integraler

- primitiva funktioner (2.1 – 2.2)
- obestämda integraler (2.3 – 2.4)

Ex En boll släpps och får falla fritt. Efter tiden t sekunder har den hastigheten $v(t) = 9{,}82\,t$ meter per sekund. Hur många meter har den fallit då?

sträcka

$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}82\, t^2$

derivera

integrera

hastighet

$v(t) = s'(t) = 9{,}82\, t$

derivera

integrera

acceleration

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9{,}82$

Svar: $\frac{1}{2} \cdot 9{,}82\, t^2$ meter.

Def Låt F och f vara funktioner definierade på ett intervall I, och låt F vara deriverbar på I. Om

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla } x \in I$$

så kallas F för en primitiv funktion till f på intervallet I.

Ex Primitiv funktion till $f(x) = 3x$ (på $\mathbb{R}$):

$$F(x) = \frac{3}{2} x^2 \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x$$

Sats Om f är kontinuerlig på I så finns det en primitiv funktion till f på I.

I själva verket finns det oändligt många eftersom vi alltid kan lägga till en godtycklig konstant C som försvinner när vi deriverar!

Ex En annan primitiv funktion till $f(x) = 3x$:

$$G(x) = \frac{3}{2} x^2 + 5 \Rightarrow G'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x$$

Föreläsning 4, del b

Sats Om F och G är två primitiva funktioner till samma funktion f på samma intervall I, så skiljer de sig bara åt på en konstant:

$$G(x) = F(x) + C$$

för alla $x \in I$ och någon konstant C.

Bevis Sätt $H(x) = G(x) - F(x)$. Då får vi

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

för alla $x \in I$. Nu använder vi följdsatsen till Lagranges medelvärdessats:

- $H'(x) < 0$ på $I \Rightarrow H$ strängt växande på I
- $H'(x) = 0$ på $I \Rightarrow H$ konstant på I
- $H'(x) > 0$ på $I \Rightarrow H$ strängt avtagande på I

Alltså är $H(x) = G(x) - F(x)$ lika med en konstant C för alla $x \in I$. $\square$

Alla primitiva funktioner $F(x)$ till funktionen $f(x) = x^p$ på $\mathbb{R}$, där $p \neq -1$:

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$$ där C konstant

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{p+1} (p+1) x^{(p+1)-1} = x^p$$

Formeln kan användas för alla reella värden på p utom $p = -1$, eftersom vi då får $p + 1 = 0$, och vi får inte dividera med noll!

Vad finns det för primitiva funktioner $F(x)$ till funktionen $f(x) = x^{-1} = 1/x$?

- På intervallet $x > 0$:

$$F(x) = \ln x + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x}$$

- På intervallet $x < 0$:

inre derivata

$$F(x) = \ln(-x) + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

Kan sättas ihop till

$$F(x) = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C & \text{då } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

på alla intervall som inte innehåller $x = 0$.

Föreläsning 4, del c

Att bestämma alla primitiva funktioner $F(x)$ till en given funktion $f(x)$ kallas för att <u>integrera</u> funktionen. Resultatet kan skrivas som en <u>obestämd integral</u>:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

En obestämd integral är ett (något oegentligt) uttryck för alla oändligt många primitiva funktioner på samma gång (eftersom konstanten C inte är bestämd). Funktionen $f(x)$ kallas i detta sammanhang för <u>integrand</u> och C kallas för <u>integrationskonstant</u>.

Ex

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Ex Exemplet med bollen igen:

Vi integrerar hastigheten $v(t) = 9{,}82t$ för att få sträckan $s(t)$ som bollen har fallit:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 9{,}82t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 9{,}82t^2 + C$$

Hur vet vi vilket värde integrationskonstanten C ska ha? Genom <u>begynnelsevillkoret</u> $s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Om bollen släpps 2 meter från taket och $y(t)$ är avståndet från bollen till taket efter tiden t sekunder så är $y(t)$ också en primitiv funktion till hastigheten $v(t)$:

$$y(t) = \int v(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 9{,}82t^2 + C$$

Men nu har vi begynnelsevillkoret

$$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2$$

Föreläsning 4, del d

Sats Låt f och g vara kontinuerliga funktioner och låt k vara en konstant.

Då gäller följande integreringsregler:

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. $\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

(Obestämda integraler är alltså linjära.)

Bevis Låt F och G vara primitiva funktioner till f respektive g.

1. $D(F(x) + G(x)) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

2. $D(kF(x)) = kF'(x) = kf(x)$

Alltså är F + G en primitiv funktion till f + g och kF är en primitiv funktion till kf.

$\square$

Ex Beräkna integralen

$$\int \left(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^2}\right) dx$$

Med hjälp av lineariteten och reglerna för $\int x^p\,dx$ för alla $p \in \mathbb{R}$ får vi

$$\int \left(\sqrt{2x} - \frac{5}{x^2}\right) dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{x}\,dx - 5\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int x^{1/2}\,dx - 5\int x^{-2}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,x^{1/2+1} - 5\,\frac{1}{-2+1}\,x^{-2+1} + C =$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,x\,x^{1/2} - 5(-1)\,x^{-1} + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x\sqrt{x} + \frac{5}{x} + C.$$

Observera att vi inte behöver skriva ut en integrationskonstant för varje integral - de är båda inbakade i C.