Föreläsning 13, del b

Integration av en jämn eller udda funktion över ett intervall symmetriskt kring $x=0$:

- Om $f(x)$ jämn:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \left(\begin{array}{l|l} t=-x & x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ dx=-dt & x=-a \Leftrightarrow t=a \end{array} \right) =$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \left(\begin{array}{c} f \text{ jämn:} \\ f(-t)=f(t) \end{array} \right)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

- Om $f(x)$ udda:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

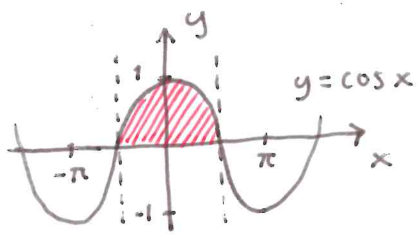
$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

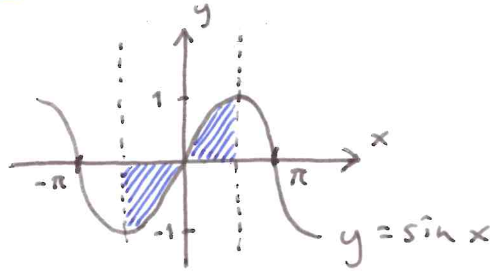
på samma sätt som ovan!

Ex

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\,dx = 0$$





Areaberäkning i planet med hjälp av bestämda integraler:

Låt f vara en kontinuerlig funktion på ett slutet intervall $[a,b]$.

Låt D vara området som begränsas av x-axeln, grafen till f (funktionskurvan), samt de vertikala linjerna $x=a$ och $x=b$.

Låt $m(D)$ vara arean av D. Kom ihåg:

$$m(D) = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & \text{om } f(x) \geq 0 \text{ för alla } x \in [a,b] \\ -\int_a^b f(x)\,dx & \text{om } f(x) \leq 0 \text{ för alla } x \in [a,b] \end{cases}$$