

Föreläsning 10, del e (demonstration testuppgifter)

2.15 Bestäm en primitiv funktion till funktionen $\frac{x}{(x-2)^2}$ med hjälp av

a) substitutionen $t = x - 2$

b) partialbråksuppdelning

Lösning:

a) $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t + 2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow dx = dt$

$$\int \frac{x}{(x-2)^2} dx = \int \frac{t+2}{t^2} dx = \int \frac{t+2}{t^2} dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2} dt + 2 \int \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + 2 \int t^{-2} dt =$$

$$= \ln |t| - 2t^{-1} + C = \ln |t| - \frac{2}{t} + C =$$

$$= \ln |x-2| + \frac{2}{2-x} + C$$

Ansatz:

b)
$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{A(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{Ax - 2A + B}{(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Vi sätter in detta i Ansatz:

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x-2)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + 2 \int \frac{1}{t^2} dt = (\text{enligt a})$$

$$= \ln |x-2| + \frac{2}{2-x} + C$$

Svar: $\int \frac{x}{(x-2)^2} dx = \ln |x-2| + \frac{2}{2-x} + C$