Föreläsning 16, del d

Det inhomogena fallet:

Tack vare lineariteten (se Föreläsning 14): Om vi känner till en lösning y_p till en inhomogen linjär diffekvation (partikulärlösning) och alla lösningar y_h till motsvarande homogena linjära diffekvation (homogenlösning) så får vi alla lösningar till den inhomogena diffekvationen som

$$y = y_h + y_p$$

> Obs! Om konstanterna i y_h ska bestämmas genom begynnelsevillkor måste detta ske efter att man har lagt till y_p. annars blir det fel! Alltså: vänta med villkoren till allra sist, och kontrollera alltid att svaret blir rätt genom insättning!

Ex) Lös diffekvationen $2y'' - 4y' - 6y = 3x^2 + 1$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$

Vi såg i förra exemplet att $y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}$

$\longrightarrow$

Vi försöker hitta en lösning y_p genom Ansatzen $y_p = ax^2 + bx + c$

Vi bestämmer konstanterna a, b och c genom att sätta in $y = ax^2 + bx + c$ i ekvationen!

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$$

$$2y'' - 4y' - 6y = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$2(2a) - 4(2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6a = 3 \\ -8a - 6b = 0 \\ 4a - 4b - 6c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{17}{18} \end{cases}$$

Vi får partikulärlösningen $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$ och den allmänna lösningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -Ae^{-x} + 3Be^{3x} - x + \frac{2}{3}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B - \frac{17}{18} = 1 \\ -A + 3B + \frac{2}{3} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -\frac{1}{18} \end{cases}$$

så vi får till slut $y(x) = 2e^{-x} - \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{17}{18}$

Det fungerar att ansätta ett polynom av samma grad som högerledet om y finns med utan derivator i vänsterledet. Annars får vi höja graden! (se demo)