Föreläsning 6, del a

Partiell integration (2.5)

Låt f och g vara funktioner och låt F vara en primitiv funktion till f, så att $F'(x) = f(x)$.

- Vi deriverar $F(x)\,g(x)$ med hjälp av produktregeln:

$$D(F(x)\,g(x)) = F'(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x) = f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x)$$

- Integrera båda leden!

$$F(x)\,g(x) = \int \left(f(x)\,g(x) + F(x)\,g'(x) \right) dx = \int f(x)\,g(x)\,dx + \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

- Flytta över!

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

Vi har hittat en "produktregel" för integration: ett sätt att integrera en produkt $f(x)\,g(x)$ av två funktioner.

Det kallas för partiell integration (eller partialintegration) (engelska: integration by parts).

- Kräver att vi redan kan integrera en av de två funktionerna: vi måste känna till en primitiv funktion F till f.
- Kräver också att vi kan integrera $F(x)\,g'(x)$. Vi kan partialintegrera en gång till, men det lönar sig inte om den nya integralen är krångligare än den första!
- Valfritt vilken av de två funktionerna i produkten som ska vara f (som vi ska integrera) och vilken som ska vara g (som vi ska derivera). Om inte det ena fungerar: testa det andra!
- Vi kan förvandla en ensam funktion $g(x)$ till en produkt $f(x)\,g(x)$ där $f(x) = 1$.

Föreläsning 6, del b

Ex Beräkna $\int x e^x dx$!

Vi testar $f(x) = x$ och $g(x) = e^x$:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F'(x) = f(x) = x$

$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

$$\int x e^x dx = \int f(x) g(x) dx = \left(\begin{matrix}\text{partiell}\\ \text{integration}\end{matrix}\right)$$

$$= F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

Men integralen $\int x^2 e^x dx$ är krångligare än den som vi hade från början!

Vi testar att låta f och g byta roller!

Sätt istället $f(x) = e^x$ och $g(x) = x$:

$F(x) = e^x \Rightarrow F'(x) = f(x) = e^x$

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

$$\int x e^x dx = \int e^x x dx = \int f(x) g(x) dx =$$

$$= F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx =$$

$$= e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - \int e^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C = \underline{(x-1)e^x + C}$$

Kontroll:

$$D((x-1)e^x + C) = D((x-1)e^x) =$$

$$= D(x-1)e^x + (x-1)De^x =$$

$$= 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = \underline{xe^x}$$

ou!

Om en av de två funktionerna i produkten som vi vill integrera är ett polynom så är det ofta smartast att välja att derivera den funktionen (eftersom gradtalet då minskar) och integrera den andra.

Föreläsning 6, del c

Ex Beräkna $\int (x^2-3x)(\cos x)\,dx$!

Erfarenheten från förra exemplet säger att vi ska välja polynomet x^2-3x som den funktion som vi deriverar och den andra funktionen $\cos x$ som den som vi integrerar!

$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x$

$g(x) = x^2-3x \Rightarrow g'(x) = 2x-3$

$$\int (x^2-3x)\cos x\,dx = \int (\cos x)(x^2-3x)\,dx =$$

$$= \int f(x)g(x)\,dx = (\text{partiell integration!})$$

$$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= (\sin x)(x^2-3x) - \int (\sin x)(2x-3)\,dx$$

Vi fick en integral som blev enklare än den första, eftersom den involverar ett förstagradspolynom $2x-3$ i stället för andragradspolynomet x^2-3x.

Vi testar att partialintegrera den nya integralen, för att på så vis komma till ett polynom av grad noll (det vill säga: en konstant):

$$\int (\sin x)(2x-3)\,dx =$$

$$= (-\cos x)(2x-3) - \int (-\cos x)\cdot 2\,dx =$$

$$= (3-2x)\cos x + 2\int \cos x\,dx =$$

$$= (3-2x)\cos x + 2\sin x + C$$

Vi sätter in detta i resultatet av den första partiella integrationen:

$$\int (x^2-3x)\cos x\,dx =$$

$$= (\sin x)(x^2-3x) - \int (\sin x)(2x-3)\,dx =$$

$$= (x^2-3x)\sin x$$

$$- (3-2x)\cos x - 2\sin x + C =$$

$$= \underline{(x^2-3x-2)\sin x + (2x-3)\cos x + C}$$

Vi hade också, tack vare lineariteten, kunnat skriva $\int (x^2-3x)\cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 3\int x\cos x\,dx$ och partialintegrerat var och en av de två integralerna i högerledet för sig.

Föreläsning 6, del d

Ibland när man partialintegrerar får man tillbaka samma integral som man hade från början (eller nästan samma).

Ex Beräkna $\int e^x \sin(2x)\,dx$!

Vi väljer att integrera e^x och derivera $\sin 2x$:

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = e^x \sin(2x) - \int e^x (2\cos(2x))\,dx =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,dx \qquad (1)$$

Vi partialintegrerar en gång till:

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = e^x \cos(2x) - \int e^x (-2\sin(2x))\,dx =$$

$$= e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\,dx \qquad (2)$$

Vi fick tillbaka samma integral som vi hade från början! Ingen mening med att fortsätta partialintegrera, vi kommer bara att "gå runt i en cirkel". Men det är inte så illa som det kan verka!

Sätt in (2) i (1)!

$$\int e^x \sin(2x) = e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)\,dx =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2\left(e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,dx$$

$\Leftrightarrow$ (flytta över och lägg till en konstant C)

$$\Leftrightarrow 5\int e^x \sin(2x)\,dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + C$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \sin(2x)\,dx = \underline{\frac{1}{5} e^x (\sin(2x) - 2\cos(2x)) + C}$$

Man kan också partialintegrera en funktion som inte ser ut som en produkt, genom att "trolla fram" en etta!

Ex

$$\int (\ln x)\,dx = \int 1 \cdot (\ln x)\,dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

$$= \underline{x(\ln x - 1) + C}$$

Kontroll:

$$D(x(\ln x - 1) + C) = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \ln x - 1 + 1 = \underline{\ln x}$$ OK!

Föreläsning 6, del e (demonstration testuppgifter)

2.7 e) Beräkna $\int (x^3+1)e^x\,dx$!

Lösning: (upprepad partialintegration!)

$$\int (x^3+1)e^x\,dx = \int e^x(x^3+1)\,dx =$$

$$= e^x(x^3+1) - \int e^x(3x^2)\,dx =$$

$$= e^x(x^3+1) - 3\int e^x x^2\,dx =$$

$$= e^x(x^3+1) - 3\left(e^x x^2 - \int e^x(2x)\,dx\right) =$$

$$= e^x(x^3+1) - 3e^x x^2 + 3\cdot 2\int e^x x\,dx =$$

$$= e^x(x^3+1-3x^2) + 6\left(e^x x - \int e^x\cdot 1\,dx\right) =$$

$$= e^x(x^3+1-3x^2+6x) - 6e^x + C =$$

$$= e^x(x^3+1-3x^2+6x-6) + C =$$

$$= (x^3-3x^2+6x-5)e^x + C$$

Svar: $\int (x^3+1)e^x\,dx =$

$= (x^3-3x^2+6x-5)e^x + C$

2.7 f) Beräkna $\int (\ln t)^2\,dt$!

Lösning: (upprepad partialintegration!)

$$\int (\ln t)^2\,dt = \int 1\cdot(\ln t)^2\,dt =$$

inre derivata!

$$= t(\ln t)^2 - \int t\left(\frac{d}{dt}(\ln t)^2\right)dt =$$

$$= t(\ln t)^2 - \int t\left(2(\ln t)\frac{d}{dt}\ln t\,dt\right) =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2\int t(\ln t)\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2\int (\ln t)\,dt =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2\int 1\cdot(\ln t)\,dt =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2\left(t\ln t - \int t\frac{1}{t}\,dt\right) =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2\int dt =$$

$$= t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + C$$

Svar: $\int (\ln t)^2\,dt =$

$= t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t + C$