Föreläsning 6, del c

Ex Beräkna $\int (x^2-3x)(\cos x)\,dx$!

Erfarenheten från förra exemplet säger att vi ska välja polynomet x^2-3x som den funktion som vi deriverar och den andra funktionen $\cos x$ som den som vi integrerar!

$f(x) = \cos x, \quad F(x) = \sin x$

$g(x) = x^2-3x \Rightarrow g'(x) = 2x-3$

$$\int (x^2-3x)\cos x\,dx = \int (\cos x)(x^2-3x)\,dx =$$

$$= \int f(x)g(x)\,dx = (\text{partiell integration!})$$

$$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= (\sin x)(x^2-3x) - \int (\sin x)(2x-3)\,dx$$

Vi fick en integral som blev enklare än den första, eftersom den involverar ett förstagradspolynom $2x-3$ i stället för andragradspolynomet x^2-3x.

Vi testar att partialintegrera den nya integralen, för att på så vis komma till ett polynom av grad noll (det vill säga: en konstant):

$$\int (\sin x)(2x-3)\,dx =$$

$$= (-\cos x)(2x-3) - \int (-\cos x)\cdot 2\,dx =$$

$$= (3-2x)\cos x + 2\int \cos x\,dx =$$

$$= (3-2x)\cos x + 2\sin x + C$$

Vi sätter in detta i resultatet av den första partiella integrationen:

$$\int (x^2-3x)\cos x\,dx =$$

$$= (\sin x)(x^2-3x) - \int (\sin x)(2x-3)\,dx =$$

$$= (x^2-3x)\sin x$$

$$- (3-2x)\cos x - 2\sin x + C =$$

$$= \underline{(x^2-3x-2)\sin x + (2x-3)\cos x + C}$$

Vi hade också, tack vare lineariteten, kunnat skriva $\int (x^2-3x)\cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 3\int x\cos x\,dx$ och partialintegrerat var och en av de två integralerna i högerledet för sig.