Tentamen SF1632 27e Maj 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. a) Hitta $a, b \in \mathbb{R}$ så att följande uttryck minimeras

$$\int_{-1}^{1} |ax + bx^3 + x^5|^2 dx \tag{1}$$

[2 poäng]

b) Antag att $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ är polynom så att

$$\int_{-1}^{1} |p_j(x)|^2 = 1 \quad \text{för } j = 0, 1, ..., n$$

och

$$\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx \quad \text{för } i \neq j.$$

Givet en funktion $f(x)$, ge ett uttryck för $a_0, a_1, ..., a_n$ så att följande integral minimeras

$$\int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \right|^2 dx.$$

[2 poäng]

Lösningsförslag fråga 1: a) Vi skulle kunna använda formeln från fråga b). Men för att göra det så skulle vi först behöva genomföra en Gram-Schmidt process på x och x^3. Det förefaller enklare att använda att derivatan med avseende på a och b måste vara noll vid minimum.

Först så observerar vi att (1) är ett kvadratiskt polynom i a och i b och eftersom värdet av integralen går till oändligheten då (a, b) går till oändligheten så existerar det ett unikt minimum.

Om vi deriverar integralen m.a.p. a och b och sätter att det är lika med noll så får vi att:

$$2\int_{-1}^{1} x(ax + bx^3 + x^5)dx = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{5} = -\frac{1}{7}$$

och

$$2\int_{-1}^{1} x^3(ax + bx^3 + x^5)dx = 0 \Rightarrow \frac{a}{5} + \frac{b}{7} = -\frac{1}{9}.$$

Det linjära ekvationssystemet löses lätt och vi får följande

Svar delfråga 1a): $a = \frac{5}{21}$ och $b = -\frac{10}{9}$.

b) Om vi gör en projektion av f, i L^2, på delrummet som spänns upp av p_k får vi att

$$\text{Proj}(f, p_k) = \frac{\int_{-1}^{1} p_k(x)f(x)dx}{\int_{-1}^{1} |p_k(x)|^2 dx} p_k(x) = \left(\int_{-1}^{1} p_k(x)f(x)dx\right) p_k(x),$$

där vi använde $\text{Proj}(f, p_k)$ för att indikera projektionen av f på delrummet som spänns upp av p_k.

Eftersom att alla $p_0, ..., p_n$ är orthogonala så kommer projektionen på delrummet som spänns upp av $p_0, ..., p_n$ att bli

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-1}^{1} p_k(x)f(x)dx\right) p_k(x).$$

Eftersom projektionen är den funktion g i det linjära höljet av $p_0, ..., p_n$ som minimerar normen $\|f - g\|$ så kan vi identifiera koefficienter och få följande svar.

Svar delfråga b): $a_k = \int_{-1}^{1} p_k(x)f(x)dx$

2. a) Beräkna Fouriertransformen av $g(x) = e^{-x}H(x)$ där H är Heaviside funktionen.

[1 poäng]

b) Använd Fouriertransformen för att hitta en funktion $f(x)$ som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = e^{-|x|},$$

där g är funktionen från delfråga a).

[3 poäng]

Lösningsförslag fråga 2: a) Vi använder definitionen av fouriertransformen (formel 4 på tentamensbladet) och beräknar:

$$\mathcal{F}(e^{-x}H(x))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}e^{-x}H(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx = \frac{1}{1+i\omega}.$$

Svar delfråga 2a): $\mathcal{F}(e^{-x}H(x))(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$.

b) Om vi tar Fouriertransformen på båda led och använder faltningsformeln (formel 7 på tentamensbladet) så får vi, där vi använder standardnotationen $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ et.c.,

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega}{1+i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2},$$

där vi även använde formel 5 för att utvärdera Fouriertransformen av högerledet.

Det följer att

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}.$$

Om vi tar inverstransformen av båda led så får vi f. För det så måste vi hitta en funktion som har Fouriertransform $\frac{1}{1-i\omega}$. Lite enkelt laborerande leder till att

$$\mathcal{F}(e^{x}H(-x))(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}dx = \frac{1}{1-i\omega}.$$

Detta ger oss vårt

Svar delfråga 2b: $f(x) = e^{x}H(-x)$, där H är Heavisidefunktionen.

3. Låt $f(x)$ vara 2π periodisk och $f(x) = |x| - \frac{\pi}{2}$ för $-\pi < x \leq \pi$.
Hitta en lösning $u(x,t)$ till följande vågekvation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & \text{för } x \in \mathbb{R} \text{ och } t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x) & \text{för } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3: Vi börjar med att göra en Fourierserieutveckling av $f(x)$. För det använder vi formel 9 på tentamensbladet samt att f är jämn på $[-\pi, \pi]$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi/2)dx = 0$$

och för $n = 1, 2, 3, ...$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi/2)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi x \frac{d\sin(nx)}{dx} dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{om } n = 2k+1 \\ 0 & \text{om } n = 2k. \end{cases}$$

Eftersom f är jämn så blir alla $b_n = 0$. Vi får alltså att

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$

För att lösa differentialekvationen så gör vi en ansättning om variabelseparation: $u(x,t) = X(x)T(t)$ och får, genom att sätta in ansättningen i vågekvationen, att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \mu = \text{konstant}.$$

Eftersom $u(x,t)$ måste vara 2π perjodisk i x så ser vi att $\mu = -n^2$ för $n = 0, 1, 2, ...$ Vi får således att följande funktioner är lösningar till vågekvationen

$$X(x)T(t) = \left((a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\left(c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)\right).$$

Vi ansätter därför att lösningen till vågekvationen är

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\left(c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)\right).$$

Eftersom $u(x,0) = 0$ så måste $c_n = 0$, vi kan även ansätta att $d_n = 1$ (genom att skriva a_n och b_n för $a_n d_n$ respektive $b_n d_n$ i uttrycket för u).

Vidare så ska $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x)$ vilket leder till

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left((a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x).$$

Genom att identifiera koefficienter så följer det att

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^3} \cos((2k+1)x)\sin((2k+1)t)$$

är en lösning till initialvärdesproblemet.

Svar fråga 3:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^3} \cos((2k+1)x)\sin((2k+1)t).$$

4. Låt $u(x)$ vara en funktion så att $u(x) = 0$ för $x < -1$, $u(x) = x + 1$ för $-1 \leq x < 0$ och $u(x)$ löser följande differentialekvation för $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} &u'(x) - 3u(x) = 0 \qquad \text{för } x > 0 \\ &u(0) = 2. \end{aligned}$$

Beräkna derivatan av $u(x)$ i distributionsmening.

[4 poäng]

Lösningsförslag Fråga 4. Den ordinära differentialekvationen är elementär och har lösningen $2e^{3x}$. Vi ska alltså hitta distributionsderivatan till

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < -1 \\ x+1 & \text{om } -1 \leq x < 0 \\ 2e^{3x} & \text{om } 0 \leq x. \end{cases}$$

Vi använder definitionen av distributionsderivata, d.v.s. för varje C^∞−funktion med kompakt stöd $\varphi(x)$ så $u'[\varphi] = -u[\varphi']$. Vi beräknar

$$u'[\varphi] = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} 0\varphi'(x)dx - \int_{-1}^{0} (x+1)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} 2e^{3x}\varphi'(x)dx =$$

$$= -\Big[(x+1)\varphi(x)\Big]_{x=-1}^{x=0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \Big[2e^{3x}\varphi(x)\Big]_{x=0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} 6e^{3x}\varphi(x)dx =$$

$$-\varphi(0) + 2\varphi(0) + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} 6e^{3x}\varphi(x)dx =$$

$$= \varphi(0) + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} 6e^{3x}\varphi(x)dx.$$

Vi känner igen högerledet som en distribution som kan skrivas

$$u'(x) = \delta(x) + H(x+1) - H(x) + 6e^{3x}H(x)$$

vilket är vårt svar.

Del 2.

5. Beräkna värdet $u(0, 1/2)$ där $u(x, y)$ löser följande randvärdesproblem på enhetsdisken $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{på } D \\ u = f & \text{på } T = \{(x,y);\ x^2 + y^2 = 1)\}. \end{array}$$

I polära koordinater ($x = r\cos(\phi)$ och $y = r\sin(\phi)$) så ges f av

$$f(r, \phi) = \sin(3\phi) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos((4k+1)\phi).$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 5: Om vi ansätter en variabelseparation i polära koordinater $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ så får vi att (från formel 10 på tentamensbladet)

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = -n^2, \tag{2}$$

där vi redan använde att $\lambda = -n^2$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ eftersom Φ är 2π periodisk.

Från (2) så får vi att

$$R(r)\Phi(\phi) = r^n(a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

Så lösningen till den partiella differentialekvationen är påformen

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)).$$

Om vi sätter $r = 1$ och jämför koefficienter med givna randdata så ser vi att

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{för } n = 4k+1 \\ 0 & \text{om } n \neq 4k+1 \end{cases}$$

och

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{för } n = 3 \\ 0 & \text{om } n \neq 3. \end{cases}$$

Vi ska beräkna värdet av u då $x = 0$ och $y = 1/2$, vilket i polära koordinater motsvaras av $r = 1/2$ och $\phi = \pi/2$. Vi får därför att

$$u(r = 1/2, \phi = \pi/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sin(3\pi/2) + \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1} \frac{1}{2^k} \cos(2k\pi + \pi/2) = -\frac{1}{8}.$$

Svar fråga 5: $u(0, 1/2) = -\frac{1}{8}$.

6. Antag att $f: T \mapsto \mathbb{R}$, där T är enhetscirkeln identifierad med $(-\pi, \pi]$, är Riemannintegrerbar och $\epsilon > 0$. Visa att det finns ett trigonometriskt polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)|\, dx < \epsilon.$$

Du får använda Stone-Weierstrass Sats utan bevis.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6: Eftersom f är Riemannintegrerbar så kan vi approximera f med en trappfunktion

$$t(x) = \begin{cases} s_1 & \text{om } -\pi = x_0 < x \leq x_1 \\ s_2 & \text{om } x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ s_n & \text{om } x_{n-1} < x \leq x_n = \pi \end{cases}$$

så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - t(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Härnäst hävdar vi att vi kan approximera $t(x)$ med en kontinuerlig funktion $g(x)$ så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t(x) - g(x)| dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

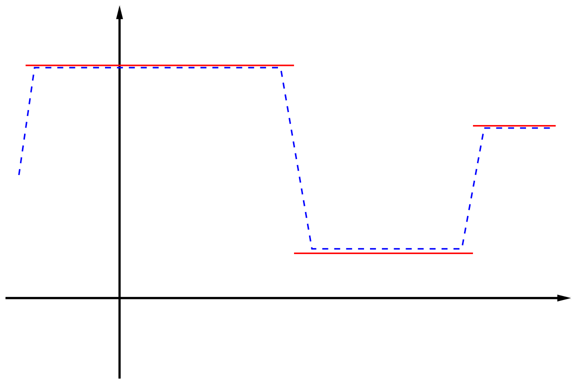
För att se detta så observerar vi att vi kan definiera $g(x) = t(x)$ förutom i ett litet område kring punkterna $x_0, x_1, ..., x_n$ där vi låter $g(x)$ vara linjär. Specifikt så kan vi låta, för $0 < \delta < \frac{\epsilon}{6 \max_{x \in T} |t(x)|}$,

$$g(x) = \frac{(n+1)(s_{i+1} - s_i)}{\delta}(x - x_i) + \frac{s_i + s_{i+1}}{2}$$

för

$$x \in \left(x_i - \frac{\delta}{2(n+1)}, x_i + \frac{\delta}{2(n+1)} \right) \tag{3}$$

och $g(x) = t(x)$ annars. Här väljer vi δ så litet att intervallen i (3) inte överlappar.



Figur: *Ovanstående figur visar en schematisk graf av t (röd) och g (streckad blå). Vi låter g och t sammanfalla förutom kring diskontinuiteterna kring x_i där vi låter g vara linjär med väldigt stor lutning.*

Med det valet av g så får vi att varje diskontinuitet, maximalt $n+1$ stycken, bidrar till $\int_T |t - g| dx$ med

$$\int_{x_i - \frac{\delta}{2(n+1)}}^{x_i} \left| \frac{(n+1)(s_{i+1} - s_i)}{\delta}(x - x_i) + \frac{s_{i+1} - s_i}{2} \right| dx +$$

$$+ \int_{x_i}^{x_i + \frac{\delta}{2(n+1)}} \left| \frac{(n+1)(s_{i+1} - s_i)}{\delta}(x - x_i) + \frac{s_i - s_{i+1}}{2} \right| dx < \frac{\epsilon}{3(n+1)}.$$

Eftersom t har (maximalt) $n+1$ diskontinuitetspunkter så följer det att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t(x) - g(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Slutligen så kan vi använda att de trigonometriska funktionerna är en funktionsalgebra som, innehåller konstanten och separerar punkter så Stone-Weierstrass Sats implicerar att det finns ett trigonometriskt polynom $p(x)$ så att

$$\sup_{x\in T}|g(x)-p(x)| \leq \frac{\epsilon}{6\pi}.$$

Genom att använda triangelolikhetern så får vi att

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-p(x)|dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-t(x)+(t(x)-g(x))+(g(x)-p(x))|dx \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-t(x)|dx + \int_{-\pi}^{\pi}|t(x)-g(x)|dx + \int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-p(x)|dx < \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+2\pi\sup_{x\in T}|g(x)-p(x)| < \epsilon.$$

Detta avslutar vårt bevis.

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-xs}dt$, där $\mathcal{L}$ är Laplace transformen.
2. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
3. Låt $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \end{cases}$ då är $\mathcal{L}(f(x-T)\theta(x-T))(s) = e^{-Ts}\mathcal{L}(f(x))(s)$.
4. Fouriertransformen definieras: $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$ där $f * g$ är faltningen (convolution på engelska) mellan f och g.
8. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$
9. Om $f(x)$ är periodisk med period L då kommer
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$
där
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx \text{ och } b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)dx.$$
10. Laplace ekvation $\Delta u = 0$ kan skrivas i polära koordinater
$$\Delta u(r,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial \phi^2} = 0.$$

Lycka Till!