Föreläsning 8, del a

Integration av rationella funktioner (2.7)

- Frågan som vi ska besvara på denna och nästa föreläsning:
  - Hur integrerar man en rationell funktion? (ett bråk av två polynom)

  Ex: $\int \frac{3x^4+4x-1}{x^3-2x}\,dx = ?$

- Verktyg som vi behöver:
  - polynomdivision
  - faktorisering av polynom
  - kvadratkomplettering

  } repetition

  - partialbråksuppdelning ← nytt!

Def) Kom ihåg: ett polynom av grad n i variabeln x är ett uttryck av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

där koefficienterna $a_1, a_2, \dots, a_n$ är konstanter och $a_n \neq 0$.

$$\text{grad } p(x) = n$$

Ex) Polynom: $-3,\ \pi,\ x^2,\ \sqrt{5}-x,\ x^7+\frac{x}{2}, \dots$

Ej polynom: $e^x,\ \sin x,\ \sqrt{x},\ \frac{1}{x},\ x^{5/3}, \dots$

Vi ska alltså hitta alla primitiva funktioner till funktioner av formen $\frac{T(x)}{N(x)}$ där $T(x)$ och $N(x)$ är polynom, och $N(x) \neq 0$.

Om grad $T(x) \geq$ grad $N(x)$ så är första steget att utföra polynomdivision och skriva $\frac{T(x)}{N(x)}$ som

$$\frac{T(x)}{N(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$$

där

grad $K(x)$ = grad $T(x)$ − grad $N(x)$,

grad $R(x)$ < grad $N(x)$.

Ex) $$\frac{3x^4+4x-1}{x^3-2x} = 3x + \frac{6x^2+4x-1}{x^3-2x}$$

grad 4, grad 3 — grad 1 — grad 2, grad 3

$4 \geq 3$ $\quad$ $1 = 4-3$ $\quad$ $2 < 3$