Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 8.juni.2020
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Julie: 0317723419. OBS! Om ni är osäker på något så fråga! (If you are unsure about anything whatsoever, please ask!) Jag kan inte få text på det här numret!! (I am unable to receive text messages at this number, so please no text messages!) Emailvakt: julie.rowlett@chalmers.se

1. Instruktionerna på svenska

För att få tentera så måste du under hela tentamenstiden vara ansluten till Zoom-mötets länk som kommer med videon påslagen med dig i bild. Du ska ha ditt riktiga namn angivet i mötet så att tentavakten ser detta. Du kan ansluta från dator eller telefon. Vid tekniska problem kontakta examinator per telefon. Du ska vara inloggad med ditt CID i Zoom via `https://chalmers.zoom.us/`

Du behöver ha en legitimation intill dig under hela tentatiden som visas upp vid starten av tentan. För att kontrollera identitet m.m. så kommer du att flyttas till ett "breakout-room" i Zoom så du behöver bara visa detta för tentavakten.

Alla hjälpmedel är tillåtna, men det är absolut förbjudet att kommunicera med någon annan under tentatiden förutom examinator och tentavakt. Därför är det förbjudet att:

- använda alla former av hörlurar eller hörsnäckor.
- kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt, detta innefattar förstås alla digitala kommunikationssätt som chattar eller forum på nätet.
- vara i ett rum med mer än en person närvarande, eller i ett rum som gränsar till rum med annan person om inte dörren mellan dessa rum är stängd. Om detta inte är möjligt pga karantän eller andra omständigheter så ska du i förväg meddela examinator vilka andra personer som kommer att vara närvarande. Det är under inga omständigheter tillåtet med mer än en tenterande person som kan ha direkt kontakt med varandra.
- Du kommer vid inlämnandet av tentan att intyga skriftligt att du följt dessa regler. All misstanke om att man bryter mot någon av dessa regler kommer att anmälas.

1.1. Rutiner för tentan.

- Zoom-mötet kommer att vara öppet minst 15 minuter innan tentan startar så att du kan ansluta dig i god tid.
- Tentatesen publiceras på Canvas vid starten av tentan som en 'Quiz' i Canvas.
- Du kommer vid tentans start att bjudas in till ett "breakout-room" i Zoom för kontroll av identitet.
- Om du har frågor till examinator eller tentavakt under tentans gång så kan du skriva denna i chatten i Zoom genom att välja att skriva bara till denne alternativt ringa till examinator.
- Om du behöver gå på toaletten så gör du det skyndsamt och meddelar tentavakten när du går och när du kommer tillbaka genom ett direkt meddelande i chatten i Zoom.
- Tentatiden är 5 timmar plus 30 minuter extra tid för tekniska inlämningar.
- Det är inte tillåtet att fortsätta arbeta med lösningarna efter tidens slut. Försenad inlämning kommer bara att godkännas om det beror på tekniska problem, t.ex. kommer trycket på Canvas att vara hårt så man kan behöva försöka mer än en gång för att ladda upp. Om du använder telefonen så ska en dokumentskannings-app användas (gratis appar som kan användas är t.ex. CamScanner och Genius skanning/Genius scan som finns för både Android och iOS). Testa appen du tänker använda före tentan så att du vet hur man scannar ett antal ark till en enda pdf-fil. Som "försättsblad" till lösningarna ska du scanna en försäkran om att du följt reglerna att inte kommunicera med någon under tentatiden.
- Före tentan ska du som ska tentera för att så långt det går undvika extra stress:
  - Bekanta dig med Zoom och försäkra dig om att du förstår hur programmet fungerar så att du klarar att följa reglerna ovan.
  - Om du tänker använda telefonen för att skanna lösningarna så ska du ladda ned en dokumentskannings-app och bekanta dig med denna så, att du vet hur man skannar ett antal blad till en enda pdf-fil.

– Förbered ett försättsblad där det står ”Jag försäkrar att jag gjort tentan på egen hand utan att få hjälp från någon annan person och att jag själv formulerat alla lösningar” tillsammans med en underskrift.

2. Instructions and rules exams in June

In order to take the exam, you must during the entire exam be connected to the Zoom meeting 'upcoming link' with the video turned on with you in the picture. You must have your real name stated in the meeting so that the examiner sees this. You can connect from computer or phone. If you have technical problems, contact the examiner by phone. Chalmers exams and joint exams only: You must be logged in with your CID in Zoom via `https://chalmers.zoom.us/`

You must have an id-card next to you during the entire exam period, which is displayed at the start of the exam. To check identity etc. you will be moved to a ”breakout room” in Zoom so you only need to show this to the exam guard.

All aids are allowed, but it is absolutely forbidden to communicate with anyone else during the exam except the examiner and the guard. Therefore, it is prohibited to:

- use all kinds of headphones or earphones.
- communicate orally or in writing with persons other than the examiner and exam guard, which of course includes all digital communication methods such as chat or online forums.
- be in a room with more than one person present, or in a room adjacent to another person's room unless the door between these rooms is closed. If this is not possible due to quarantine or other circumstances, you must notify the examiner in advance what other people will be present. Under no circumstances are more than one person taking an exam allowed to have direct contact with each other.
- Upon submission of the exam, you will certify in writing that you have followed these rules. Any suspicion of violating any of these rules will be reported.

2.1. **Procedures for the exam.**

- The Zoom meeting will be open at least 15 minutes before the exam starts so you can join in time.
- The exam problems are published on Canvas at the start of the exam.
- Before the start, or in the beginning of the exam you will be invited to a breakout room in Zoom for identity verification.
- If you have questions for the examiner or exam guard during the exam, you can write this in the chat in Zoom by choosing to write only to one person or call the examiner.
- If you need to go to the toilet, do so quickly and notify the exam guard when you go and when you come back through a direct message in the chat in Zoom.
- The exam time is 5 hours plus 30 minutes extra time for submission of solutions.
- It is not allowed to continue working with the solutions after the end of time. You have a maximum of 30 minutes to submit the solutions. Delayed submission will only be approved if it is due to technical problems, e.g. the pressure on Canvas will be intense so you may have to try more than once to upload. If you are using the phone, a document scanning app should be used (free apps that can be used are CamScanner and Genius scan available for both Android and iOS). The solutions must be submitted as a single pdf file. Test the app you intend to use before the exam so you know how to scan a number of sheets into a single PDF file. As a ”cover page” to the solutions, you should scan a declaration that you have followed the rules of not communicating with anyone during the exam period.
- Before the exam to avoid extra stress as far as possible:
  – Familiarize yourself with Zoom and make sure you understand how the program works so that you can follow the rules above.
  – If you plan to use the phone to scan the solutions, download a document scanning app and familiarize yourself with it so you know how to scan a number of sheets into a single pdf file.
  – Prepare a cover page that says ”I assure that I did the exam on my own without getting help from any other person and that I formulated all the solutions myself” along with a signature.

3. English/Svenska

3.1. **The following problems are worth 4 points each.** ***Följande problem är värda 4 poäng vardera.***

(1) Is the following equation for the unknown function u a PDE or an ODE?
Är följande ekvationen för den okänd funktionen u en PDE eller en ODE?

$$(u'(t))^2 - \sin(u(t)) = \cos(t).$$

(a) PDE
(b) ODE (correct)

(2) Is the following equation for the unknown function u a PDE or an ODE?
Är följande ekvationen för den okänd funktionen u en PDE eller en ODE?

$$u_t(t,x) - ku_{xx}(t,x) = G(t,x).$$

(a) PDE (correct)
(b) ODE

(3) Is the following boundary condition self-adjoint?
Är följande randvillkor själv-adjunkta?

$$f(0) = 0, \quad f'(1) = -f(1).$$

(a) yes *ja* (correct)
(b) no *nej*

(4) Is the following problem a regular SLP?
Är följande problement ett regulärt SLP?

$$\big(\cos(x)f'(x)\big)' + \lambda f(x) = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0), \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'(0).$$

(a) yes *ja*
(b) no *nej* (no - this is quite tricky - the BCs are not self-adjoint)

(5) Does the limit below exist, and if so, what is closest its approximate value?
Finns gränsvärdet och i så fall vilket tal är närmast till dess värde?

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{in27\pi}.$$

(a) the limit does not exist *gränsvärdet finns ej*
(b) the limit is closest to 0 *gränsvärdet är närmast till* 0
(c) the limit is closest to 1 *gränsvärdet är närmast till* 1
(d) the limit is closest -1 *gränsvärdet är närmast till* -1
(e) the limit is closest to 3 *gränsvärdet är närmast till* 3 This is correct. remember that the series is periodic, so evaluating at 27 is the same as evaluating at 1. The Fourier series for e^x on $(-\pi, \pi)$ is

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{1-in}.$$

Thus at the point $x = 27$ the series converges to $\cosh(\pi)$. Re-arranging, we obtain that the limit above is equal to

$$\frac{\pi \cosh \pi}{\sinh \pi} \approx 3.$$

(6) Does the limit below exist, and if so, which value is the closest to the limit?
Finns gränsvärdet och i så fall vilket tal är närmast till dess värde?

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

(a) the limit does not exist *gränsvärdet finns ej*
(b) the limit is closest to 0 *gränsvärdet är närmast till* 0

(c) the limit is closest to 1 *gränsvärdet är närmast till* 1 The Fourier series for the function which is -1 on $(-\pi, 0)$ and 1 on $(0, \pi)$ is

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1)}.$$

When $x = \frac{\pi}{2}$, we have that

$$\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}.$$

Consequently the series

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)\pi/2}{2n-1)} = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \to 1.$$

Re-arranging, the limit above is

$$\frac{\pi}{4}.$$

This is closest to 1.

(d) the limit is closest -1 *gränsvärdet är närmast till* -1

(e) the limit is closest to 3 *gränsvärdet är närmast till* 3

(7) Is the function $|x|$ piecewise $\mathcal{C}^1$?

Är funktionen $|x|$ *styckvis* $\mathcal{C}^1$*?*

(a) yes *ja* (correct)

(b) no *nej*

(8) What technique can be used to solve for the unknown function $u(x)$ which satisfies

Vilken teknik kan användas för att lösa detta problem?

$$u(x) + \int_{-2}^{2} u(x-t)dt = e^{-x^2}?$$

(a) Laplace transform *Laplacetransformen*

(b) Fourier transform *Fouriertransformen* Correct. The integral from -2 to 2 can be re-written as

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x-t)\chi_2(t)dt,$$

where $\chi_2(t) = 1$ if $|t| < 2$, and otherwise it is zero. Thus the integral is a convolution. Hitting the whole equation with the Fourier transform, one can solve for $\hat{u}$, then use the FIT to obtain u.

(c) Sturm-Liouville Problems *SLPs*

(d) Fourier series *Fourierserier*

(9) Find the polynomial $p(x)$ of at most degree 4 which minimises

Hitta polynomet $p(x)$ *av grad högst* 4 *som minimerar*

$$\int_{-2}^{3} |p(x) - e^x|^2 dx.$$

Okay, so the interval is wonky. We need to get back to the interval we like $[-1, 1]$ and use Legendre somehow... I know that $P_n(x)$ (Legendre polynomial of degree n) are orthogonal on the interval $[-1, 1]$. So we know that

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$$

So, we would like somehow to get

$$\int_{-2}^{3} P_n(ax+b)P_m(ax+b)dx = ... \int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)...dt.$$

How to move $[-2,3]$ to $[-1,1]$? Draw a picture and get that

$$[-2,3] = \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right].$$

So we want to use

$$t = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Then when x goes from -2 to 3, we have t going from -1 to 1. Moreover,

$$dt = \frac{2}{5}dx.$$

Consequently we have

$$\int_{-2}^{3} P_n\left(\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) P_m\left(\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx = \frac{2}{5}\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{5}\begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m. \end{cases}$$

This shows that the polynomials

$$P_n\left(\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

are orthogonal on $[-2,3]$. They therefore form a basis by a theorem we proved. Consequently the best approximation is given by

$$p(x) = \sum_{n=0}^{4} c_n P_n\left(\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad c_n = \frac{\int_{-2}^{3} e^y P_n\left(\frac{2}{5}\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) dy}{\frac{4}{5(2n+1)}}.$$

(10) What is your very LEAST favourite type of problem to solve in this course? Explain what you find difficult, yucky, or otherwise bothersome about that type of problem.

Vilken typ/typer av problem hatar du i den här kursen? Förklarar varför du tycker det är svårt, äckligt, besvärligt...

Personally, it wigs me out when I look at a problem and just like have no idea where to start. That sucks. That is my least favorite situation. When in that situation, I look for similar problems. How were those solved? Try those techniques, maybe see if I can tweak the weird problem into a more familiar problem.

3.2. **The following problems are worth 2 points each.** ***Följande problem är värde 4 poäng vardera.***

(1) Consider the following problem:
Betrakta följande problem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0, \quad x \in (-1,1) \\ u(0,x) = 1 - |x|, & x \in (-1,1) \\ u_t(0,x) = 0, & x \in (-1,1) \\ u_x(t,-1) = u_x(t,1) = 0 \end{cases}$$

Is the boundary condition self-adjoint?
Är följande randvillkor själv-adjunkta?
- (a) yes *ja* (correct)
- (b) no *nej*

(2) What should we do first?
Vad borde vi göra först?
- (a) find a steady-state solution *hitta en tidsoberoende lösning*
- (b) separate variables *variabelseparation* (do this!)
- (c) apply the Fourier transform *använda Fouriertransformen*
- (d) apply the Laplace transform *använda Laplacetransformen*

(3) Which technique will be an important part of finding the solution?
Vilken teknik kommer att bli en viktig del av lösningen?
(a) a Sturm-Liouville Problem *ett SLP* (this is it!)
(b) the Laplace transform *Laplacetransformen*
(c) the Fourier cosine transform *Fourier-cosinustransformen*
(d) the Fourier sine transform *Fourier-sinustransformen*

(4) What form will the solution take?
Vilken form kommer lösning att ha?
(a) a convolution *en faltning*
(b) an inverse Fourier transform *en invers-Fouriertransform*
(c) a Fourier series *en Fourier-serie* (correct!)
(d) an inverse Laplace transform *en invers-Laplacetransform*

(5) What technique will provide the solution to the following problem
Vilken teknik kommer att lösa följande problem

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = e^{-x^2}.$$

(a) the Laplace transform *Laplacetransformen*
(b) the heat kernel *värmeledningskärnan* (our favorite)
(c) Plancharel's theorem *Plancharels sats*
(d) Bessel's inequality *Bessels olikehet*
(e) Fourier sine transform *Fourier-sinustransformen*

(6) What technique will provide the solution to the following problem
Vilken teknik kommer att lösa följande problem

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad u(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u(0, x) = u_t(0, x) = 0.$$

(a) the Laplace transform *Laplacetransformen* (yikes, creepy boundary condition at $x = 0$ which depends on t, so this means Laplace transform will help us!)
(b) the heat kernel *värmeledningskärnan*
(c) Plancharel's theorem *Plancharels sats*
(d) Bessel's inequality *Bessels olikehet*
(e) Fourier cosine transform *Fourier-cosinustransformen*

(7) Is the following function Laplace-transformable?
Är följande funktion Laplace-transformerbar?

$$f(x) = e^{x^2}.$$

(a) yes *ja*
(b) no *nej* (correct. super exponential growth? I don't think so!)

(8) Is the following function Fourier-transformable?
Är följande funktion Fourier-transformerbar?

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

(a) yes *ja* (yes, because it is in L^2.)
(b) no *nej*

(9) If we wish to solve
Om vi önskar lösa

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(t)\cos(x) & 0 < t, \ -\pi < x < \pi \\ u(x,0) = |x| - \pi & x \in [-\pi, \pi] \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & t \geq 0 \end{cases}$$

which technique will NOT help?
vilken teknik kommer INTE att hjälpa oss?
(a) Fourier series *Fourierserier*
(b) Fourier transform *Fouriertransform* (correct. Fourier transform works on problems where x is in the whole real line, not for x in a bounded interval).

(c) separation of variables *variabelseparation*
(d) regular Sturm-Liouville problem *regulärt SLP*

(10) Which technique could be used to solve $u'' - u + 2g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ if we assume

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty?$$

Vilken teknik kan används att lösa $u'' - u + 2g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ *om vi antar att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty?$$

(a) Fourier transform *Fouriertransformen* (this one!)
(b) Laplace transform *Laplacetransformen*
(c) Fourier series *Fourierserier*
(d) regular Sturm-Liouville problem *regulärt SLP*

3.3. **The theory part! These are worth 2 points each, except the last two, which are worth 4 points each.** ***Teori-delen! De här uppgifterna är värda 2 poäng vardera, förutom de sista två som är värda 4 poäng vardera!***

(1) Consider the following identity
Betrakta följande identitet

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\cos(kx) = \frac{n\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1-\cos(nx)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

The proof of this identity is similar to a computation in which of the following theory items?
Beviset av den här ekvationen liknar en beräkning i vilken sats?
(a) the big bad convolution approximation theorem *den stora faltnings-approximation-satsen*
(b) Plancharel's theorem *Plancharels sats*
(c) pointwise convergence of Fourier series *punktvis konvergens av Fourier-serier* (this one! to obtain the identity above, we'd use a geometric series, just like is done with the calculation involving the Dirichlet kernel in this proof).
(d) the Sampling theorem *Samplingsatsen*

(2) In the proof of the Sampling Theorem, we assume that $\hat{f}(x)$ in the statement of the theorem is zero outside of a bounded interval. What does this allow us to do with $\hat{f}$?
I Samplingsatsens bevis vi antar att $\hat{f}(x)$ *i satsen är lika med noll utanför ett begränsat intervall. Vad tillåter det oss att göra med* $\hat{f}$*?*
We can expand it as a Fourier series!

(3) In the proof of the Generating Function for the Bessel functions, what do we do to turn the sums
I det beviset av den genererande funktionen för dem Bessel funktionerna, hur förvandlar vi summorna

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}$$

into *till*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\geq 0}?$$

We make a change of variables, keeping k the same, and making this new variable $m = n - k$. Then m ranges all over the integers, both positive and negative.

(4) What is the most important technique from calculus that we use repeatedly in the proof of the orthogonality of the Hermite polynomials?
Vad är det viktigaste verktyget från envariabelanalys som vi använder upprepade gånger i beviset av Hermite-polynomens ortogonalitet?
Integration by parts!

(5) What does the FIT say?
Vad säger FIT?
For any L^2 function we have

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

(6) What is a common calculus technique we use in the Generating Function for the Bessel functions and also the Generating Function for the Hermite polynomials?

Power series expansions! (also known as Taylor series expansions!)
Vad är en vanlig teknik från envariabelanalys som vi använder i både den genererande funktionen för dem Bessel funktionerna och den genererande funktionen för dem Hermite-polynomen?

(7) (4p) What is the most bizarre step, in your opinion, in the proof of the pointwise convergence of Fourier series? Please explain why?
I think it's when we pull that new function g out of nowhere. Like, how long would you have to stare at this part to come up with that idea??? No wonder Fourier never proved this theorem himself! It is super tricky. I wonder who proved it for the very first time? Perhaps Dirichlet, because it's got his name in it?
Vilket steg, tycker du, i beviset av punktvis konvergens av Fourier-serier är konstigast? Är du snäll och förklarar varför då?

(8) (4p) What is your favorite theory item, and please explain this item, and why it is your favorite?
Förklara ditt favoritbevis från teorilistan i denna kurs. Varför är det beviset din favorit? Vad gör det så bra?
I don't really have a favorite. I like them all. Then again, I grew up to become a mathematician, so I go around proving theorems for a living, so I guess this makes sense.