Föreläsning 15, del e (demonstration testuppgifter)

5.5 (Se boken för uppgiftstext)

Lösning (inledning)

Låt $m(T)$ kg vara massan av den mängd salt som finns i tanken efter T timmar.

Volymen r m^3 saltlösning innehåller då $\frac{r}{V} m(T)$ kg salt. Detta är alltså massan av den mängd salt som flödar ut ur tanken per timme vid tiden T timmar.

Massan av den mängd salt som flödar in i tanken per timme är 0 kg i a) och $m_2 r$ kg i b) (konstant i båda fallen).

Inflöde minus utflöde ger:

a) $m'(T) = -\frac{r}{V} m(T)$

b) $m'(T) = m_2 r - \frac{r}{V} m(T)$

I båda fallen har vi begynnelsevillkoret

$m(0) = m_1$

a) Lösning: (forts.)

$$m' = -\frac{r}{V} m \iff m' + \frac{r}{V} m = 0 \iff$$

(Integrerande faktor: $e^{\frac{r}{V}T}$)

$$e^{\frac{r}{V}T} m' + \frac{r}{V} e^{\frac{r}{V}T} m = 0 \iff$$

$$\frac{d}{dT}\left(e^{rT/V} m\right) = 0 \iff$$

$$e^{rT/V} m = C \iff m = Ce^{-rT/V}$$

Begynnelsevillkoret $m(0) = m_1$ ger $C = m_1$ och

$$m(T) = m_1 e^{-rT/V} \to 0 \text{ då } T \to \infty$$

Svar: $m_1 e^{-rT/V}$ kg salt finns kvar efter T timmar, och 0 kg efter lång tid.

b) Lösning: (forts.) På samma sätt:

$$\frac{d}{dT}\left(e^{rT/V} m\right) = m_2 r e^{rT/V} \iff e^{rT/V} m = V m_2 e^{rT/V} + C$$

$$\iff m = V m_2 + Ce^{-rT/V}$$

Begynnelsevillkoret ger $C = m_1 - V m_2$ och

$$m(T) = V m_2 + (m_1 - V m_2) e^{-rT/V} \to m_1 \text{ då } T \to \infty$$

Svar: $V m_2 + (m_1 - V m_2) e^{-rT/V}$ kg efter T timmar, $V m_2$ kg efter lång tid