Tentamen SF1632 27e Maj 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiseras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. a) Hitta $a, b \in \mathbb{R}$ så att följande uttryck minimeras

$$\int_{-1}^{1} |ax + bx^3 + x^5|^2 dx$$

[2 poäng]

b) Antag att $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ är polynom så att

$$\int_{-1}^{1} |p_j(x)|^2 = 1 \qquad \text{för } j = 0, 1, ..., n$$

och

$$\int_{-1}^{1} p_i(x)p_j(x)dx \qquad \text{för } i \neq j.$$

Givet en funktion $f(x)$, ge ett uttryck för $a_0, a_1, ..., a_n$ så att följande integral minimeras

$$\int_{-1}^{1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \right|^2 dx.$$

[2 poäng]

2. a) Beräkna Fouriertransformen av $g(x) = e^{-x}H(x)$ där H är Heaviside funktionen.

[1 poäng]

b) Använd Fouriertransformen för att hitta en funktion $f(x)$ som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = e^{-|x|},$$

där g är funktionen från delfråga a).

[3 poäng]

3. Låt $f(x)$ vara 2π periodisk och $f(x) = |x| - \frac{\pi}{2}$ för $-\pi < x \leq \pi$.
Hitta en lösning $u(x,t)$ till följande vågekvation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & \text{för } x \in \mathbb{R} \text{ och } t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x) & \text{för } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

[4 poäng]

4. Låt $u(x)$ vara en funktion så att $u(x) = 0$ för $x < -1$, $u(x) = x + 1$ för $-1 \leq x < 0$ och $u(x)$ löser följande differentialekvation för $x \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} u'(x) - 3u(x) = 0 & \text{för } x > 0 \\ u(0) = 2. & \end{array}$$

Beräkna derivatan av $u(x)$ i distributionsmening.

[4 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. Beräkna värdet $u(0, 1/2)$ där $u(x, y)$ löser följande randvärdesproblem på enhetsdisken $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{på } D \\ u = f & \text{på } T = \{(x,y);\ x^2+y^2 = 1)\}. \end{array}$$

I polära koordinater ($x = r\cos(\phi)$ och $y = r\sin(\phi)$) så ges f av

$$f(r,\phi) = \sin(3\phi) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos((4k+1)\phi).$$

[4 poäng]

6. Antag att $f : T \mapsto \mathbb{R}$, där T är enhetscirkeln identifierad med $(-\pi, \pi]$, är Riemannintegrerbar och $\epsilon > 0$. Visa att det finns ett trigonometriskt polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

så att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)|\, dx < \epsilon.$$

Du får använda Stone-Weierstrass Sats utan bevis.

[4 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-xs}dt$, där $\mathcal{L}$ är Laplace transformen.
2. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$
3. Låt $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \le 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \end{cases}$ då är $\mathcal{L}(f(x-T)\theta(x-T))(s) = e^{-Ts}\mathcal{L}(f(x))(s)$.
4. Fouriertransformen definieras: $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$
5. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$
6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$
7. $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$ där $f * g$ är faltningen (convolution på engelska) mellan f och g.
8. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)dx = 0.$$

9. Om $f(x)$ är periodisk med period L då kommer

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)$$

där

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx \text{ och } b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx.$$

10. Laplace ekvation $\Delta u = 0$ kan skrivas i polära koordinater

$$\Delta u(r,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\phi)}{\partial \phi^2} = 0.$$

Lycka Till!