Föreläsning 7, del a

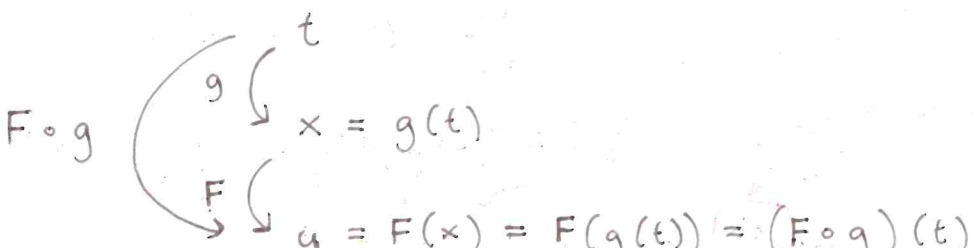
Variabelsubstitution

- Förra gången: "produktregeln bakläges"
  → partialintegration
- Idag: "kedjeregeln bakläges"
  → variabelsubstitution

Kom ihåg: Kedjeregeln är regeln för derivatan av en sammansatt funktion.

Anta att y är en variabel som beror på en variabel x genom en funktion F.
Anta också att x i sin tur beror på en variabel t genom en funktion g.

Då beror y på t genom den sammansatta funktionen $F \circ g$.



Derivatan av F med avseende på x:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx}$$

Derivatan av g med avseende på t:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = \frac{d}{dt}x = \frac{dx}{dt}$$

Derivatan av den sammansatta funktionen $F \circ g$ med avseende på t:

$$(F\circ g)'(t) = \frac{d}{dt}F(g(t)) =$$

$$= \frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} =$$

$$= F'(x)\,g'(t) = F'(g(t))\,g'(t)$$

Kedjeregeln kan alltså skrivas

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = F'(g(t))\,g'(t) \quad \text{eller}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$ och säger att den yttre derivatan $F'(g(t)) = \frac{dy}{dx}$ ska multipliceras med den inre derivatan $g'(t) = \frac{dx}{dt}$.

Föreläsning 7, del b

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\, g'(t)$$

Anta att F är en primitiv funktion till en funktion f, det vill säga att $F'(x) = f(x)$, och $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Integrera nu båda leden i kedjeregeln med avseende på t:

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\, g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(g(t)) + C = \int F'(g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) + C = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = \int f(x)\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

Genom att ersätta (substituera) uttrycket $g(t)$ med variabeln x, och $g'(t)\,dt$ med dx, kan vi förenkla integralen $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$.

Detta kallas variabelsubstitution och är användbart när vi ska integrera en produkt av två funktioner och vi känner igen en av dem som (nästan) en inre derivata.

Ex Beräkna $\int (t^2+4)^{31}\, t\, dt$!

Vi kan utveckla parentesen, multiplicera med t och integrera som vanligt, men det blir väldigt jobbigt! Smartare att införa en ny variabel $x = g(t)$ som är uttrycket inne i parentesen! Sätt sedan $f(x) = x^{31}$.

$$g(t) = t^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad g'(t) = 2t$$

Enligt formeln för integration genom variabelsubstitution har vi nu:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int (t^2+4)^{31}\, (2t)\, dt = \int x^{31}\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int (t^2+4)^{31}\, t\, dt = \frac{1}{2} \int x^{31}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{1}{32}\, x^{32} + C = \underline{\frac{1}{64} (t^2+4)^{32} + C}$$

Föreläsning 7, del c

Integration genom variabelsubstitution:

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \qquad \text{där } x = g(t)$$

Vi har redan sett två specialfall av regeln. Kom ihåg från Föreläsning 5:

① $\displaystyle\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dx = \ln|g(t)| + C$

② $\displaystyle\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}F(at+b) + C$

där F är en primitiv funktion till f och a och b är konstanter ($a \neq 0$).

Vi visar att ① och ② är specialfall av den allmänna regeln:

①: Sätt $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \iff$$

$$\int \frac{1}{g(t)}\,g'(t)\,dt = \int \frac{1}{x}\,dx \iff$$

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|x| + C = \ln|g(t)| + C$$

②: Sätt $g(t) = at+b \Rightarrow g'(t) = a$:

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx \iff$$

$$\int f(at+b)\,a\,dt = F(x) + C \iff$$

$$\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}F(x) + C$$

(egentligen C/a)

Ex Beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$!

Vi vet att $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$. Kan vi "göra om fyran till en etta"? Enligt ②:

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1/2}\arctan\left(\frac{1}{2}x\right)\right) + C = \underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$$

Vi kan också använda regeln om integration genom variabelsubstitution "åt andra hållet":

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{(2t)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4t^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{dx}{dt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2\,dt = \frac{2}{4}\arctan t + C = \underline{\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C}$$

där $x = 2t \iff t = \frac{x}{2}$

Föreläsning 7, del d

Ibland är flera olika substitutioner möjliga:

Ex) Beräkna $\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx$!

Faktorn x^2 är "nästan" derivatan av x^3-2, så vi testar att sätta $u = x^3-2$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3-2) = 3x^2$$

$$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt{x^3-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{dx}\sqrt{u}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\frac{1}{3/2}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x^3-2)^{3/2} + C$$

Men vi kan också sätta $v = \sqrt{x^3-2}$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^3-2} = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2}}(3x^2) = x^2\frac{3}{2v}$$

$$\int x^2\sqrt{x^3-2}\,dx = \int x^2 v\,dx = \int x^2\left(\frac{3}{2v}\frac{2v}{3}\right)v\,dx =$$

$$= \int\left(x^2\frac{3}{2v}\right)\frac{2}{3}v^2\,dx = \int \frac{dv}{dx}\left(\frac{2}{3}v^2\right)dx \;(=)$$

$$(=)\ \int\left(\frac{2}{3}v^2\right)dv = \frac{2}{3}\int v^2\,dv = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}v^3\right) + C =$$

$$= \frac{2}{9}v^3 + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3-2}\right)^3 + C = \frac{2}{9}(x^3-2)^{3/2} + C$$

Variabelsubstitution är ofta särskilt användbart när man ska integrera produkter av trigonometriska funktioner:

Ex) Beräkna $\int(\cos\theta)^2(\sin\theta)\,d\theta$!

Sätt $x = \cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$

$$\int(\cos\theta)^2(\sin\theta)\,d\theta = -\int(\cos\theta)^2(-\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= -\int x^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -\int x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(\cos\theta)^3 + C$$

(Det fungerar inte lika bra att sätta $x = \sin\theta$.)

2.8 d Bestäm en primitiv funktion till

$\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ (med hjälp av lämplig substitution)!

Lösning: Testa $u=\sqrt{x}=x^{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}x^{1/2}=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2}(x^{1/2})^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2u}$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}}=\frac{1}{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}}=\frac{1}{u^2+u}=\frac{1}{u(u+1)}=$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{u+1}=2\frac{1}{2u}\frac{1}{u+1}=2\frac{du}{dx}\frac{1}{u+1}$$

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx=\int 2\frac{du}{dx}\frac{1}{u+1}dx=2\int\frac{1}{u+1}du=$$

$$=2\ln|u+1|+C=2\ln|\sqrt{x}+1|+C$$

Det räcker med en primitiv funktion, så vi behöver inte ha med C i svaret, och inte heller beloppstecknet.

Svar: $2\ln(\sqrt{x}+1)$

2.9 a Bestäm med hjälp av lämplig trigonometrisk substitution

$$\int(\sin x)(\cos x)\,dx \;?$$

Lösning: Sätt $u=\sin x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

$$\int(\sin x)(\cos x)\,dx=\int u\frac{du}{dx}dx=\int u\,du=$$

$$=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{1}{2}(\sin x)^2+C$$

Alternativ lösning:

Använd formeln för sinus av dubbla vinkeln!

$$\int(\sin x)(\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int 2(\sin x)(\cos x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos(2x))+K=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos(2x)+K=$$

(formeln för cosinus av dubbla vinkeln!)

$$=-\frac{1}{4}(1-2(\sin x)^2)+K=\frac{1}{2}(\sin x)^2+K-\frac{1}{4}$$

Samma som ovan om vi sätter $K-\frac{1}{4}=C$!

Svar: $\frac{1}{2}(\sin x)^2+C$.