Föreläsning 4, del b

Sats Om F och G är två primitiva funktioner till samma funktion f på samma intervall I, så skiljer de sig bara åt på en konstant:

$$G(x) = F(x) + C$$

för alla $x \in I$ och någon konstant C.

Bevis Sätt $H(x) = G(x) - F(x)$. Då får vi

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

för alla $x \in I$. Nu använder vi följdsatsen till Lagranges medelvärdessats:

- $H'(x) < 0$ på I $\Rightarrow$ H strängt växande på I
- $H'(x) = 0$ på I $\Rightarrow$ H konstant på I
- $H'(x) > 0$ på I $\Rightarrow$ H strängt avtagande på I

Alltså är $H(x) = G(x) - F(x)$ lika med en konstant C för alla $x \in I$. $\square$

Alla primitiva funktioner $F(x)$ till funktionen $f(x) = x^p$ på $\mathbb{R}$, där $p \neq -1$:

$$F(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad \text{där } C \text{ konstant}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{p+1}(p+1)x^{(p+1)-1} = x^p$$

Formeln kan användas för alla reella värden på p utom $p = -1$, eftersom vi då får $p+1=0$, och vi får inte dividera med noll!

Vad finns det för primitiva funktioner $F(x)$ till funktionen $f(x) = x^{-1} = 1/x$?

- På intervallet $x > 0$:

$$F(x) = \ln x + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x}$$

- På intervallet $x < 0$:

inre derivata

$$F(x) = \ln(-x) + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

Kan sättas ihop till

$$F(x) = \ln|x| + C = \begin{cases} \ln x + C & \text{då } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

på alla intervall som inte innehåller $x = 0$.