Föreläsning 12, del d

Vi kan alltså beräkna bestämda integraler med hjälp av insättningsformeln

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

om vi känner till en primitiv funktion F till f.

Vi inför beteckningen $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Sambandet mellan bestämd och obestämd integral kan därmed skrivas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

Ex Beräkna $\int_0^2 x^3\,dx$!

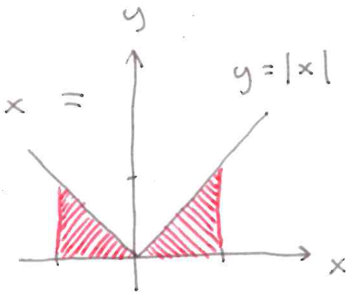
$$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \tfrac{1}{4}\left[x^4\right]_0^2 =$$

$$= \tfrac{1}{4}(2^4 - 0^4) = \tfrac{1}{4}2^4 = 4$$

Ex Beräkna $\int_1^2 x^2\,dx$!

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \tfrac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \tfrac{7}{3}$$

Ex Beräkna $\int_{-1}^1 |x|\,dx$!



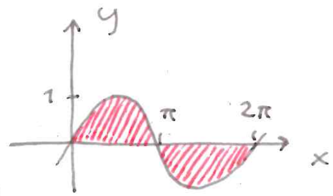
$$\int_{-1}^1 |x|\,dx = \int_{-1}^0 |x|\,dx + \int_0^1 |x|\,dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx =$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(0-(-1)^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(1^2 - 0\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$

Ex Beräkna $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$!



$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -[\cos x]_0^{2\pi} =$$

$$= -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

Partialintegration och variabelsubstitution fungerar även för bestämda integraler.

Vid variabelsubstitution:

- måste man också byta integrationsgränserna (mycket viktigt, se demo av testuppgifter)
- behöver man inte byta tillbaka till sist, eftersom resultatet är ett tal, inte en funktion.