Föreläsning 7, del b

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\, g'(t)$$

Anta att F är en primitiv funktion till en funktion f, det vill säga att $F'(x) = f(x)$, och $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Integrera nu båda leden i kedjeregeln med avseende på t:

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\, g'(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(g(t)) + C = \int F'(g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) + C = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\int f(x)\, dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int f(x)\, dx = \int f(x) \frac{dx}{dt}\, dt$$

Genom att ersätta (substituera) uttrycket $g(t)$ med variabeln x, och $g'(t)\,dt$ med dx, kan vi förenkla integralen $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$.

Detta kallas variabelsubstitution och är användbart när vi ska integrera en produkt av två funktioner och vi känner igen en av dem som (nästan) en inre derivata.

Ex Beräkna $\int (t^2+4)^{31}\, t\, dt$!

Vi kan utveckla parentesen, multiplicera med t och integrera som vanligt, men det blir väldigt jobbigt! Smartare att införa en ny variabel $x = g(t)$ som är uttrycket inne i parentesen! Sätt sedan $f(x) = x^{31}$.

$$g(t) = t^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad g'(t) = 2t$$

Enligt formeln för integration genom variabelsubstitution har vi nu:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int (t^2+4)^{31} (2t)\, dt = \int x^{31}\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\int (t^2+4)^{31}\, t\, dt = \frac{1}{2} \int x^{31}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} x^{32} + C = \underline{\frac{1}{64} (t^2+4)^{32} + C}$$