Föreläsning 16, del e (demonstration testuppgifter)

5.6 Lös följande homogena diffekvationer:

c) $y'' - 2y' + y = 0$

Lösning:

Karakteristiskt polynom: $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$

Ett dubbelt nollställe: 1

Allmän lösning: $y = (Ax + B)e^{1 \cdot x}$

Svar: $y(x) = (Ax + B)e^x$

d) $y'' + 4y = 0$

Lösning:

Karakteristiskt polynom: $r^2 + 4$

Karakteristisk ekvation: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4$

Saknar reella lösningar! Men det finns två komplexa lösningar: $r = \pm 2i$ $(= a \pm bi$, där $a = 0$, $b = 2)$

Allmän lösning: $y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx) =$

$= A \cos 2x + B \sin 2x$

Svar: $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$

5.7 Lös följande inhomogena diffekvationer:

c) $y'' + 2y' = 2x - 1$

Lösning: Vi löser först motsvarande homogena diffekvation: $y'' + 2y' = 0$

Karakteristiskt polynom: $r^2 + 2r = r(r+2)$

Nollställen: $r_1 = 0$ och $r_2 = -2$

Homogenlösning: $y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = A + Be^{-2x}$

Nu vill vi hitta en partikulärlösning y_p!

Högerledet är ett förstagradspolynom, men vänsterledet saknar y-term så vi måste ansätta ett andragradspolynom:

$y = ax^2 + bx (+c) \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a$

$y'' + 2y' = 2x - 1 \Leftrightarrow 2a + 2(2ax + b) = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 2a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vi får $y_p = ax^2 + bx = \frac{1}{2}x^2 - x$

och $y = y_h + y_p = A + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x$

Svar: $y(x) = A + Be^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - x$