FX-skrivning, CM1000:TEN1 – Diskret matematik, januari 2020 – Lösningar

Lösningar

1. *Logik.* Antag att utsagorna p, q, r uppfyller de tre kraven $p \wedge q \to r$ och $q \wedge r \to p$ respektive $p \wedge r \to q$. Gäller då $p \leftrightarrow q$ och $q \leftrightarrow r$? Varför? Varför inte? (Uppgiften får lösas på valfritt sätt.)

Lösning: Vi kan se utsagorna $p \leftrightarrow q$ och $q \leftrightarrow r$ som att p, q, r alla har samma sanningsvärde, alltså alla är antingen sanna eller så är alla falska. Det följer dock inte av de tre kraven $p \wedge q \to r$ och $q \wedge r \to p$ respektive $p \wedge r \to q$ eftersom vi kan hitta en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som uppfyller dessa tre krav, till exempel $p = sann$, $q = r = falsk$, som uppfyller alla tre kraven men uppenbarligen har utsagorna p, q, r inte alla samma sanningsvärde. (Vi kan hitta dessa tre tilldelningar av sanningsvärden genom att studera en sanningstabell.)

2. *Mängdlära.* Antag att mängderna A, B, C uppfyller de tre kraven $A \cap B \subset C$ och $B \cap C \subset A$ respektive $A \cap C \subset B$. Måste vi då ha $A = B = C$? Om det är så, ge ett bevis för detta. Om det inte är så ge exempel på tre mängder A, B, C som uppfyller de tre kraven men ändå inte $A = B = C$. Uppgiften får *inte* lösas med hänvisning till Venndiagram, ett *logiskt hållbart argument* måste presenteras. (Sen kan du förstås rita Venndiagram för att undersöka problemställningen.)

Lösning: Betrakta exemplet $A = \{1\}$, $B = C = \emptyset$. Dessa tre mängder uppfyller alla de tre krav som är uppställda, men mängderna är ändå inte exakt samma, det vill säga vi har inte $A = B = C$ så svaret är här, liksom förra uppgiften, NEJ. (Anmärkning: den logiska strukturerna på de två första uppgifterna är mycket likartade och de båda motexemplena liknar därför varandra.)

3. *Funktioner.* Låt E, F, G vara givna mängder och låt funktionerna $f : E \to F$ respektive $g : F \to G$ vara givna. Betrakta påståendet

$$f \text{ är surjektiv och } g \text{ är surjektiv} \Rightarrow g \circ f \text{ är surjektiv.}$$

Påståendet är antingen sant eller falskt. Om det är sant, bevisa det. Om det är falskt, ge exempel på tre mängder E, F, G och två funktioner f, g där funktionerna $f : E \to F$ respektive $g : F \to G$ är surjektiva men där $g \circ f$ inte är surjektiv.

Lösning: Påståendet är *sant* och vi visar detta genom att visa att om både f och g är surjektiva så blir också funktionen $g \circ f$ är surjektiv. För att visa detta antar vi att både f och g är surjektiva och väljer ett godtyckligt $z \in G$. Vi ska visa att det finns ett $x \in E$ så att $z = g \circ f(x)$. Eftersom funktionen $g : F \to G$ är surjektiv så finns ett $y \in F$ sådant att

$$z = g(y),$$

men nu kan vi bara använda surjektiviteten hos $f : E \to F$ och finna $x \in E$ sådant att $y = f(x)$. Enligt vad vi har funnit är $z = g(y) = g(f(x))$ vilket visar att $g \circ f$ är surjektiv eftersom z var godtyckligt valt i G. Eftersom vi arbetade under antagandet att f och g var surjektiva följer den implikation som skulle visas.

5a. *Relationer – a-uppgiften.* Sätt $A = \{1, 2, 3\}$ och bilda relationen $\mathcal{R}$ på A genom att sätta

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (3,1)\}.$$

Ge en utredning av vilka egenskaper relationen $\mathcal{R}$ har av *reflexivitet*, *symmetri*, och *antisymmetri.* (Vi **bortser** från *transitivitet*), det vill säga om relationen har en viss egenskap, ge ett bevis för detta respektive om relationen inte har en viss egenskap, bevisa det. (Eftersom $\mathcal{R}$ är explicit given av en mängd behövs alltså inga beräkningar.)

Lösning: Relationen *är reflexiv* eftersom alla möjliga par på formen (a, a) ingår där $a = 1, 2, 3$. Relationen är *inte symmetrisk* eftersom vi inte har ekvivalensen $x\mathcal{R}y \leftrightarrow y\mathcal{R}x$ gällandes för alla $x, y \in A$. Till exempel har vi $1\mathcal{R}2$ (eftersom $(1, 2) \in \mathcal{R}$) men vi har *inte* $2\mathcal{R}1$ (eftersom vi *inte* har $(2, 1) \in \mathcal{R}$) och alltså har vi ett exempel på x, y där $x\mathcal{R}y \leftrightarrow y\mathcal{R}x$ inte gäller och därför är relationen inte symmetrisk. Relationen är dock antisymmetrisk, det som ska gälla för antisymmetri är ju att implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$$

ska gälla för alla $x, y \in A$. Om vi studerar de par som bygger upp relationen så kan vi observera att så fort $x \neq y$ så är det endast ett av paren (x, y) som ligger i relationen, det vill säga att om $x \neq y$ så gäller endast en av (x, y) respektive (y, x), men *inte* båda. Det betyder att implikationen $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$ alltid kommer att ha ett falskt förled om $x \neq y$, det vill säga den kommer alltid att vara sann om $x \neq y$. Men om $x = y$ så är efterledet sant vilket också gör implikationen sann, det vill säga implikationen måste bli sann för alla möjliga $x, y \in A$. Detta *är* antisymmetri.

5b. *Relationer – b-uppgiften.* Låt A vara en icketom mängd och låt $\mathcal{R}$ vara en relation på A. Det finns möjlighet att $\mathcal{R}$ är icke-reflexiv och symmetrisk och antisymmetrisk, det är fallet om vi väljer $\mathcal{R} = \emptyset$. Det blir förstås en *löjlig* relation: *inga* element relaterar till varandra alls! Men frågan är, finns det någon *annan* relation än $\emptyset$ som har dessa egenskaper: icke-reflexiv, symmetrisk och antisymmetrisk? Om svaret är JA, ge ett exempel på en sådan relation $\mathcal{R}$ (med tillhörande mängd $A \neq \emptyset$). Om svaret är NEJ, visa varför. (Då behöver du alltså ge ett bevis av varför en relation $\mathcal{R}$ som är icke-reflexiv, symmetrisk och antisymmetrisk uppfyller $\mathcal{R} = \emptyset$).

Lösning: Vi kan ta mängden i förra uppgiften $A = \{1, 2, 3\}$ och definiera relationen

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

som då är en relation som inte är $\emptyset$. Vidare är denna relation *inte* reflexiv eftersom $(3, 3)$ saknas. (Kravet för att en relation ska vara reflexiv är ju att alla element på formen (a, a) ingår och vi saknar alltså $(3, 3)$ så att vi inte har $3\mathcal{R}3$.) Vidare är denna relation symmetrisk eftersom vi alltid har implikationen

$$x\mathcal{R}y \leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

för alla x, y, mängden har ju inga $x \neq y$ med $x\mathcal{R}y$ så $x\mathcal{R}y$ är ju alltid falsk om $x \neq y$ och om $x = y$ är ju $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}x$ precis samma utsaga. Vidare är relationen antisymmetrisk och vi ser det genom att studera implikationen

$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$$

som ska gälla för alla $x, y \in A$. Eftersom de enda möjligheterna för element att vara överhuvudtaget vara relaterade är då $(x, y) = (1, 1)$ eller $(x, y) = (2, 2)$ och vi i båda dessa fall har $x = y$, så att efterledet i implikationen alltså är *sant* så måste relationen bli antisymmetrisk eftersom implikationen alltid är sann (så fort efterledet i en implikation är sant så är implikationen sann).

6. *Fördjupad talteori.* Använd matematisk induktion för att bevisa att att för alla heltal $n \geq 4$ gäller

$$2^{n+1} \cdot n! > 5^n.$$

Lösning: Vi inför predikatet $A(n) \Leftrightarrow 2^{n+1} \cdot n! > 5^n \Leftrightarrow VL_n \geq HL_n$ för alla naturliga tal n. Vi ska nu visa

$$\forall n \geq 4 : A(n)$$

med matematisk induktion.

Steg 1. Kontrollera att $A(4)$ är sann, det vill säga att $VL_4 \geq HL_4$. Vi beräknar

$$VL_4 = 2^{4+1} \cdot 4! = 32 \cdot 24 = 768 \qquad HL_4 = 5^4 = 625$$

och eftersom $768 > 25$ så är $A(4)(\Leftrightarrow VL_4 > HL_4)$ sann. Detta fullbordar första steget.

Steg 2. Vi visar nu att implikationen $A(p) \Rightarrow A(p+1)$ är sann för alla $p \geq 4$ så vi antar att $A(p)$ är sann för ett godtydckligt $p \geq 4$. Då har vi alltså

$$A(p) \Leftrightarrow 2^{p+1} \cdot p! > 5^p \qquad \text{(och } p \geq 4\text{).}$$

och detta kallar vi *induktionsantagandet* (som också kan uttryckas $VL_p \geq HL_p$). Med kraft av detta ska vi nu visa att $A(p+1)$ gäller, det vill säga att

$$2^{(p+1)+1} \cdot (p+1)! > 5^{(p+1)}$$

gäller. Detta kan förstås också uttryckas $VL_{p+1} > HL_{p+1}$ och vi ska alltså visa att $VL_{p+1} > HL_{p+1}$ följer av $VL_p > HL_p$ (induktionsantagandet) då $p \geq 4$. För att se att detta verkligen gäller behöver vi studera uttrycken för VL_{p+1} och HL_{p+1} i detalj. Vi har då

$$VL_{p+1} = 2^{(p+1)+1} \cdot (p+1)! = 2 \cdot 2^{p+1}(p+1) \cdot p! = 2 \cdot (p+1) \cdot VL_p$$

respektive

$$HL_{p+1} = 5^{p+1} = 5 \cdot 5^p = 5 \cdot HL_p$$

och vårt mål är alltså att visa $VL_{p+1} > HL_{p+1}$ det vill säga

$$2 \cdot (p+1) \cdot VL_p > 5 \cdot HL_p$$

med stöd av induktionsantagandet $VL_p > HL_p$ och $p \geq 4$. Men om $p \geq 4$ så blir $2 \cdot (p+1) \geq 2(4+1) = 8 \geq 5$ och alltså har vi implikationerna

$$p \geq 4 \wedge VL_p > HL_p \Rightarrow 2(p+1) \geq 5 \wedge VL_p > HL_p \Rightarrow 2(p+1) \cdot VL_p > 5 \cdot HL_p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(p+1) \cdot VL_p > 5 \cdot HL_p \Leftrightarrow VL_{p+1} \geq HL_{p+1}$$

vilket fullbordar steg 2.

Steg 3. Steg 1 och steg 2 och induktionsaxiomet fullbordar beviset.

7. *Grafteori.* Bevisa att om ett träd har ett löv så måste det ha ett löv till. *(Ledning: antag motsatsen det vill säga att det finns ett träd med bara ett löv. Vad kan du då säga om alla andra hörns gradtal? Använd det för att hitta en motsägelse.)*

Lösning: Antag motsatsen, det vill säga att det finns ett träd som bara har precis ett löv. Det betyder att gradtalet hos samtliga noder förutom lövet är ≥ 2, det vill säga varje hörn förutom lövet, har två olika kanter som ansluter. Vi kan då bilda en följd av hörn i grafen

$$lv_1v_2v_3\ldots$$

där hörnet l är det enda lövet som finns. Från l går precis en kant som vi följer och då kommer vi till hörn v_1. Eftersom det finns ett löv (l) i trädet så går det att ta detta steg. Vi ska nu beskriva hur den följande sekvensen av hörn $v_2, v_3, \ldots$ väljs. Eftersom vi talar om en sekvens av hörn så har varje hörn i sekvensen en föregångare och en efterföljare. Föregångaren till v_1 var l. Sekvensen definieras nu rekursivt genom att sätta efterföljaren av v_p (alltså v_{p+1}) till ett annat hörn än v_{p-1}. Detta är möjligt eftersom gradtalet till v_p är ≥ 2 och det finns alltså två olika kanter som förbinder v_{p-1} (föregångaren till v_p) med v_p och v_p med v_{p+1} (efterföljaren till v_p). En oändlig följd av hörn uppstår alltså eftersom vi aldrig kan komma tillbaka till l (till l leder ju bara en kant). Men eftersom grafen bara har ett ändligt antal hörn *måste* något hörn v_k upprepas i följden, det vill säga någon gång måste vi se

$$\ldots v_k v_{k+1} \ldots v_k \ldots$$

men om ett hörn upprepas i följden svarar det mot att grafen har en cykel vilket är omöjligt eftersom grafen ju skulle vara ett träd. Antagandet om att det bara fanns precis bara ett löv måste alltså vara felaktigt och vi måste således ha minst ett löv till. Detta fullbordar beviset.

8. *Kombinatorik.* Du har tre kulor, en röd och två blåa. Du har också tre urnor, U_1, U_2 och U_3. På hur många olika sätt kan du placera ut kulorna i de tre urnorna om du inte skiljer på kulor med samma färg? Du får lägga hur många kulor som helst i varje urna.

Lösning: Vi kan se placerandet av kulor som en process i två steg:
Steg 1. Placera ut de två blåa kulorna,
Steg 2. Placera ut de den röda kulan.
Eftersom vi kan placera kulorna som vi vill är dessa delsteg oberoende av varandra så att om antal sätt att utföra steg 1 är A_1 ovh antal sätt att utföra steg 2 är A_2 så blir totala antalet sätt att utföra steg 1 och 2 lika med $A_1 \cdot A_2$ enligt multiplikationsprincipen. Det återstår att finna de två talen A_1 och A_2. Talet A_1 är alltså antalet sätt att placera två identiska (blåa) kulor i tre olika behållare, antalet sätt att göra detta är enligt en formel

$$A_1 = \binom{3+2-1}{3-1} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

(Vi behöver inte referera till formeln, vi kan också resonera så här: antingen läggs de två kulorna i samma urna, det blir 3 möjligheter att placera dem, eller så läggs kulorna i olika urnor och då finns det

3 möjligheter att göra det, nämligen en möjlighet för varje urna som inte har en kula. Alltså $3 + 3 = 6$ möjligheter, enligt additionsprincipen.) Vi har alltså $A_1 = 6$.

Det återstår att beräkna A_2 som alltså är antalet sätt att placera en kula i en av tre urnor. Det blir helt enkelt 3 sätt.

Total antalet sätt att placera kulorna blir nu $A_1 \cdot A_2 = 6 \cdot 3 = 18$.

9a. *Sannolikhetslära – a-uppgiften.* Vi har tre urnor, U_1, U_2 och U_3. Den första urnan innehåller tre kulor, en gul, en blå och en röd. Den andra urnan innehåller en gul och en blå kula. Den sista urnan innehåller en gul kula. Vi drar en kula ur varje urna så att vi får tre kulor. Beräkna sannolikheten att det bland dessa tre dragna kulor finns minst två kulor med samma färg.

Lösning: Den sökta sannolikheten kommer att bli ett tal på formen

$$\frac{m}{n},$$

där m är total antalet sätt att välja tre kulor på det sätt som föreskrivs, det brukar också kallas antalet *gynnsamma* utfall. Talet n är totala antalet sätt att överhuvudtaget välja kulor *utan* några restriktioner, det brukar också kallas *totala antalet* utfall.

Vi beräknar m genom att se processen att välja kulor på det beskrivna sättet som en process i tre delsteg. Observera att det finns inga restriktioner på hur vi anser att ordningen av kulvalen sker, vi är fria att beskriva processen som om den första kulan valdes ur urnan med bara en kula i, den sista urnan. Vi ser kulvalen som en process med tre steg:

Steg 1. Första kulan väljs från urna 3. Beteckna antalet sätt att göra detta val med A_1.
Steg 1. Andra kulan väljs från urna 2. Beteckna antalet sätt att göra detta val med A_2.
Steg 1. Tredje kulan väljs från urna 1. Beteckna antalet sätt att göra detta val med A_3.

Eftersom det bara finns en kula i den sista urnan blir $A_1 = 1$. När nu andra kulan ska väljas, enligt kraven att alla kulor ska vara olikfärgade, finns det bara ett val och det är att välja den blåa kulan, det betyder att även andra delsteget kan utföras på precis ett sätt, vi har alltsa även $A_2 = 1$. På samma sätt inses att även $A_3 = 1$ och

$$m = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Talet n är nu antalet sätt att välja kulor med inga som helst restriktioner på kulvalen. Enligt samma modell blir detta antal $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ eftersom vi nu kan välja kulor fritt. Den sökta sannolikheten ges nu av

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{6}.$$

9b. *Sannolikhetslära – b-uppgiften.* Studenten Alex har studerat inför tentamen i diskret matematik och har ett delområde kvar (det är samma examinationsform som i den här kursen med nio delområden). Det brukar komma två olika typer av frågor på delområdet som Alex har kvar och vi kallar typerna av uppgifter som kan komma för typ A respektive typ B. Alex favorituppgift är uppgifter av typ A och det är 80% chans att Alex klarar en sådan uppgift. Det är dock bara 50% chans att Alex klarar en uppgift av typ B. Det är säkert att någon av typerna A och B kommer att komma och det är 60% chans att det blir en uppgift av typ A. Beräkna sannolikheten att Alex klarar uppgiften som examinerar delområdet.

Lösning: Vi inför händelserna

K = *Alex klarar uppgiften*,
A = *uppgiften är av typ* A och
B = *uppgiften är av typ* B

Enligt texten i problemformuleringen gäller följande

$P(K|A) = 0.80$
$P(K|B) = 0.50$
$P(A) = 0.60$
$P(B) = 0.40$ (eftersom A och B är komplementhändelser.)

Den sökta sannolkheten, $P(K)$, kan nu beräknas med lagen för total sannolikhet enligt

$$P(K) = P(K|A) \cdot P(A) + P(K|B) \cdot P(B) = 0.80 \cdot 0.60 + 0.50 \cdot 0.40 = 0.48 + 0.20 = 0.68$$

och det är alltså 68% sannolikhet att Alex klarar uppgfiten.