Föreläsning 2, del a

Induktion (1.5)

- induktionsprincipen

Ex Finns det någon formel för summan $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ som gäller för alla $n \in \mathbb{Z}_+$?

Vi beräknar först summan för $n = 1, 2, 3$:

$n=1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$n=2$: $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$n=3$: $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \frac{1}{3 \cdot 4} =$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}$

Förmodan:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

Hur visar vi detta?

Problem: de positiva heltalen är oändligt många, det skulle ta oändligt lång tid att kolla varje n för sig!

Lösning: induktion!

Betrakta utsagan (påståendet)

$U(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ där $n \in \mathbb{Z}_+$

För varje positivt heltalsvärde på n finns det ett sanningsvärde (sant / falskt) på $U(n)$.

Vi har visat att $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$ alla är sanna. Vi vill visa att utsagan $U(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

Föreläsning 2, del b

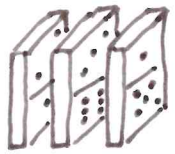
Induktionsprincipen:

Anta att $U(n)$ är en utsaga där $n \in \mathbb{Z}_+$, och att följande två villkor är uppfyllda:

1. $U(1)$ är sann (basfall)
2. $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ för alla $p \in \mathbb{Z}_+$
   (induktionssteg)
   induktionsantagande

Då är $U(n)$ sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

$U(1) \overset{1,2}{\Rightarrow} U(2) \overset{2}{\Rightarrow} U(3) \overset{2}{\Rightarrow} \cdots$



Ex] Tillbaka till exemplet med utsagan

$$U(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Villkor (1) är uppfyllt: utsagan är sann i basfallet $n=1$.

Är villkor (2) också uppfyllt?

Induktionsantagande:

$$U(p): \quad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$$

Vi antar att p är ett positivt heltal sådant att $U(p)$ är sann. Vi ska använda detta antagande för att visa att även $U(p+1)$ måste vara sann i så fall.

$$U(p+1): \quad \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{(p+1)+1}$$

$$VL = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)((p+1)+1)} =$$

induktionsantagandet!

$$= \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2} = HL$$

Enligt induktionsprincipen följer det att $U(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$!

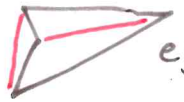
Föreläsning 2, del c

Anmärkningar till induktionsprincipen:

- basfallet behöver inte vara $n=1$
- det kan finnas flera basfall
- i induktionssteget får man lov att använda inte bara $U(p)$ utan alla utsagorna $U(1), U(2), \dots, U(p)$ som induktionsantagande, för att visa att $U(p+1)$ följer.

Ex] Låt D_n vara antalet diagonaler i en (konvex) n-hörning ($n \geq 3$):

konvex



ej konvex

Finns det någon formel för D_n?

n	3	4	5	6	7
D_n	0	2	5	9	14
D_{n+1}	1	3	6	10	15
		+2	+3	+4	+5

$n=3$

$n=4$

$n=5$

$n=6$

Förmodan: För alla heltal $n \geq 3$ gäller:

$$D_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + (n-2) = \frac{(n-2)((n-2)+1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \iff$$

$$D_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 = \frac{n^2-2n-n+2}{2} - \frac{2}{2} \iff$$

$$\boxed{D_n = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Vi försöker visa detta med induktion!

- Basfall: Då $n=3$ har vi $VL=0$ och

$$HL = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0 = VL$$ (ok!)

- Induktionsantagande: Vi antar att

$$\boxed{D_p = \frac{p(p-3)}{2}}$$ för något heltal $p \geq 3$.

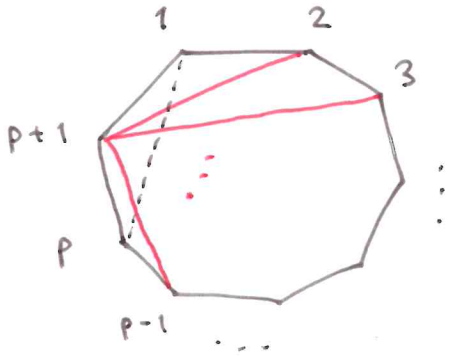
- Induktionssteget: Vi ska visa att induktionsantagandet medför att

$$\boxed{D_{p+1} = \frac{(p+1)((p+1)-3)}{2}}$$

Ex) (forts.) Vi ska visa att

$$D_p = \frac{p(p-3)}{2} \Rightarrow D_{p+1} = \frac{(p+1)((p+1)-3)}{2}$$

där D_n är antalet diagonaler i en konvex n-hörning. Betrakta en konvex $(p+1)$-hörning:



- Hörnen 1, 2, ..., p bildar en p-hörning med $D_p = \frac{p(p-3)}{2}$ diagonaler, enligt induktionsantagandet.
- Från hörn p+1 kan vi dra $p-2$ diagonaler till hörnen 2, 3, ..., p-1.
- Dessutom har vi 1 diagonal mellan hörn 1 och hörn p.

Totalt har vi

$$D_{p+1} = \frac{p(p-3)}{2} + (p-2) + 1 =$$

$$= \frac{p^2-3p}{2} + \frac{2p-4}{2} + \frac{2}{2} =$$

$$= \frac{p^2-3p+2p-4+2}{2} = \frac{p^2-p-2}{2}$$

diagonaler i $(p+1)$-hörningen.

Vi ville visa att

$$D_{p+1} = \frac{(p+1)((p+1)-3)}{2}$$

Vi har alltså $VL = \frac{p^2-p-2}{2}$ och

$$HL = \frac{(p+1)((p+1)-3)}{2} = \frac{(p+1)(p-2)}{2} =$$

$$= \frac{p^2-2p+p-2}{2} = \frac{p^2-p-2}{2} = VL$$ (ok!)

Enligt induktionsprincipen gäller nu

$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ för alla heltal $n \geq 3$!

Föreläsning 2, del e (demonstration testuppgifter)

1.16 Visa med induktion att, då $n \in \mathbb{Z}_+$

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

d) $3^{2n-1} + 2^{n+1}$ är delbart med 7

Lösning

a) Basfall: Då $n=1$ har vi VL $=1$ och

$$HL = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = VL$$ (ok!)

Induktionsantagande: Anta att

$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$ för något $p \in \mathbb{Z}_+$.

Då får vi

$$\sum_{k=1}^{p+1} k = \sum_{k=1}^{p} k + (p+1) = \text{(ind.-ant.)}$$

$$= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2} =$$

$$= \frac{(p+2)(p+1)}{2} = \frac{(p+1)((p+1)+1)}{2}$$ (ok!)

Klart enligt induktionsprincipen!

d) Basfall: Då $n=1$ har vi

$3^{2n-1} + 2^{n+1} = 3 + 2^2 = 7 = 7 \cdot 1$ (ok!)

Induktionsantagande: Anta att

$3^{2p-1} + 2^{p+1} = 7k$ för något heltal k.

Är då $3^{2(p+1)-1} + 2^{(p+1)+1}$ också delbart med 7?

$$3^{2(p+1)-1} + 2^{(p+1)+1} = 3^{2p+1} + 2^{p+2} =$$

$$= 3^{2p-1} 3^2 + 2^{p+2} = \text{(ind.-ant.)}$$

$$= (7k - 2^{p+1}) \cdot 3^2 + 2^{p+2} =$$

$$= 7k \cdot 3^2 - 2^{p+1} \cdot 3^2 + 2^{p+1} \cdot 2 =$$

$$= 7k \cdot 3^2 - 2^{p+1}(3^2 - 2) =$$

$$= 9 \cdot 7k - 7 \cdot 2^{p+1} = 7(\underbrace{9k - 2^{p+1}}_{\text{heltal}})$$ (ok!)

Klart enligt induktionsprincipen!